

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*absolute Konvergenz*)

4/1/15

$\sum a_i$ ist *absolut konvergent* $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum |a_i|$ ist konvergent.

Satz 4.7 Sei $\sum a_i$ eine Reihe mit $a_i \geq 0$ für jedes i .

4/1/28

Dann gilt: $\sum a_i$ ist konvergent gdw die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Definition. (*unbedingte Konvergenz*)

4/2/8

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion (oder auch *Permutation* von \mathbb{N}).

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ durch *Umordnung* aus $\sum a_n$ entstanden.

$\sum a_n$ heißt *unbedingt konvergent*

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Jede durch Umordnung aus } \sum a_n \text{ entstandene Reihe ist konvergent.}$

Satz 4.12 Eine absolut konvergente Reihe konvergiert unbedingt und zwar immer gegen denselben Wert.

4/2/9

(D.h., für absolut konvergente Reihen gilt das allgemeinste Kommutativgesetz.)

Satz 4.14 (*Multiplikation unendlicher Reihen*)

4/2/13

Voraussetzungen:

(1) Es seien $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum a_m = a$, $\sum b_n = b$.

(2) f sei eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(Die Existenz einer solchen Bijektion weist man mit dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren nach).

(3) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $f(i) = (m_i, n_i)$ und $c_i = a_{m_i} b_{n_i}$.

Behauptung:

$\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ ist absolut konvergent, und es ist $\sum_{i=0}^{\infty} c_i = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = a \cdot b$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\sum c_i$ absolut konvergiert.

g.z.z.: Die Folge der Partialsummen von $\sum |c_i|$ ist nach oben beschränkt.

Nach Voraussetzung existiert für jedes $i \in \mathbb{N}$ genau ein Paar $(m_i, n_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so daß $f(i) = (m_i, n_i)$, also $c_i = a_{m_i} b_{n_i}$.

Wir bilden

$$S_k := \sum_{i=0}^k |c_i| = \sum_{i=0}^k |a_{m_i} b_{n_i}| := (\star).$$

Sei $l = \max\{m_0, \dots, m_k, n_0, \dots, n_k\}$. Die Summanden aus (\star) kommen unter den Summanden aus $|a_0 b_0| + \dots + |a_i b_j| + \dots + |a_l b_l|$ vor, wobei $i, j \leq l$.

Dann ist

$$\begin{aligned} S_k = (\star) &\leq |a_0 b_0| + \dots + |a_i b_j| + \dots + |a_l b_l| \\ &= \left(\underbrace{|a_0| + \dots + |a_l|}_{:= S'_l} \right) \cdot \left(\underbrace{|b_0| + \dots + |b_l|}_{:= S''_l} \right) = S'_l \cdot S''_l. \end{aligned}$$

Da $\sum |a_i|$, $\sum |b_i|$ nach Voraussetzung konvergieren, sind (S'_n) , (S''_n) beschränkt. Folglich ist $(S'_n \cdot S''_n)$ beschränkt und somit ist auch (S_k) beschränkt. Hieraus ergibt sich die Konvergenz von $\sum |c_i|$ und damit die absolute Konvergenz von $\sum c_i$.

Behauptung: $\sum c_i = a \cdot b$.

Da $\sum c_i$ absolut konvergiert, ist jede Umordnung von $\sum c_i$ ebenfalls konvergent und zwar gegen den gleichen Wert.

Wir betrachten eine spezielle Umordnung und Zusammenfassung bestimmter Summanden:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} c_i &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{m_i} b_{n_i} = \underbrace{a_0 b_0}_{:= c'_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0)}_{:= c'_1} + \dots + \\ &\quad \underbrace{(a_0 b_i + a_1 b_i + \dots + a_i b_i + a_i b_{i-1} + \dots + a_i b_0)}_{:= c'_i} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} c'_i. \end{aligned}$$

Es seien

$$S_n^* = \sum_{i=0}^n c'_i, \quad S_n^{**} = \sum_{i=0}^n a_i \quad \text{und} \quad S_n^{***} = \sum_{i=0}^n b_i.$$

Dann gilt für die oben angegebene Umordnung: $S_n^* = S_n^{**} \cdot S_n^{***}$.

Wegen $S_n^{**} \rightarrow a$, $S_n^{***} \rightarrow b$ gilt $S_n^* = S_n^{**} \cdot S_n^{***} \rightarrow a \cdot b$, also

$$\sum c_i = a \cdot b = \left(\sum a_m \right) \cdot \left(\sum b_n \right). \quad \square$$