

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Wir befassen uns jetzt noch kurz mit sogenannten *Doppelreihen*. Dazu sei

4/2/19

$$(a_{mn}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

eine „unendliche Matrix“. Eine Matrix dieser Art nennen wir auch *Doppelfolge*. Die *Doppelfolge*  $(a_{mn})$  *konvergiert* gegen  $a$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert, so daß für alle  $m, n \geq n_0$  gilt:  $|a_{mn} - a| < \varepsilon$ . **Bez.:**  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn} = a$

Es sei jetzt

$$S_{mn} := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} = (a_{00} + \dots + a_{0n}) + (a_{10} + \dots + a_{1n}) + \dots + (a_{m0} + \dots + a_{mn}).$$

Dann heißt (analog wie bei der Definition von Reihen) die Doppelfolge  $(S_{mn})$  auch *Doppelreihe*.

$$\mathbf{Bez.:} \quad (S_{mn}) := \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$$

Die *Doppelreihe konvergiert* gegen  $a$ , wenn  $(S_{mn})$  gegen  $a$  konvergiert.

$$\mathbf{Bez.:} \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = a$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob man den Limes  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn}$  (falls er existiert) auch so berechnen kann, indem man zunächst die Zeilensummen  $b_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$  bildet und anschließend die unendliche Summe der  $b_i$  betrachtet (falls diese Reihen konvergieren; eine entsprechende Frage könnte auch für die Spaltensummen gestellt werden). Unter gewissen Voraussetzungen kann der Limes tatsächlich so bestimmt werden. Aufschluß darüber gibt der folgende Satz.