

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (absolute Konvergenz)

4/1/15

$\sum a_i$ ist absolut konvergent $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \sum |a_i|$ ist konvergent.

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Wir befassen uns jetzt noch kurz mit sogenannten *Doppelreihen*. Dazu sei

4/2/19

$$(a_{mn}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

eine „unendliche Matrix“. Eine Matrix dieser Art nennen wir auch *Doppelfolge*. Die *Doppelfolge* (a_{mn}) konvergiert gegen a , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für alle $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_{mn} - a| < \varepsilon$. **Bez.:** $\lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn} = a$

Es sei jetzt

$$S_{mn} := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} = (a_{00} + \dots + a_{0n}) + (a_{10} + \dots + a_{1n}) + \dots + (a_{m0} + \dots + a_{mn}).$$

Dann heißt (analog wie bei der Definition von Reihen) die Doppelfolge (S_{mn}) auch *Doppelreihe*.

$$\text{Bez.: } (S_{mn}) := \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$$

Die *Doppelreihe* konvergiert gegen a , wenn (S_{mn}) gegen a konvergiert.

$$\text{Bez.: } \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = a$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob man den Limes $\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn}$ (falls er existiert) auch so

berechnen kann, indem man zunächst die Zeilensummen $b_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ bildet und an-

schließend die unendliche Summe der b_i betrachtet (falls diese Reihen konvergieren; eine entsprechende Frage könnte auch für die Spaltensummen gestellt werden). Unter gewissen Voraussetzungen kann der Limes tatsächlich so bestimmt werden. Aufschluß darüber gibt der folgende Satz.

Satz 4.15 (Großer Umordnungssatz)

4/2/20

Es sei $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ eine Doppelreihe, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Bijektion, und für $\varphi(\nu) = (i, j)$

sei $b_\nu := a_{ij}$. Weiterhin sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ absolut konvergent und $\sum b_\nu = b$. Dann gilt:

- (1) Jede Zeilenreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} := Z_i$ konvergiert absolut.
- (2) Jede Spaltenreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} := S_j$ konvergiert absolut.
- (3) Die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} S_j$ konvergieren absolut, und es ist
- $$\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b.$$