

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Definition.** (*absolute Konvergenz*)

4/1/15

$\sum a_i$  ist absolut konvergent  $\stackrel{\text{Df}}{\iff} \sum |a_i|$  ist konvergent.

### 4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

**Satz 4.15** (*Großer Umordnungssatz*)

4/2/20

Es sei  $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$  eine Doppelreihe,  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  eine Bijektion, und für  $\varphi(\nu) = (i, j)$

sei  $b_\nu := a_{ij}$ . Weiterhin sei  $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$  absolut konvergent und  $\sum b_\nu = b$ . Dann gilt:

- (1) Jede Zeilenreihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} := Z_i$  konvergiert absolut.
- (2) Jede Spaltenreihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} := S_j$  konvergiert absolut.
- (3) Die Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} S_j$  konvergieren absolut, und es ist
 
$$\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b.$$

**Beweis.** Sei  $|b_\nu| = \beta_\nu$ . Nach Voraussetzung konvergiert  $\sum \beta_\nu$ ; es sei  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu = \beta$ .

4/2/21

Wegen  $\beta_\nu \geq 0$  ist die Summe je endlich vieler  $\beta_{\nu_1}, \dots, \beta_{\nu_k}$  stets  $\leq \beta$ . Damit erhält man

(1).  $\sum_{j=0}^n \underbrace{|a_{ij}|}_{=\beta_\nu} \leq \beta$  für alle  $n$ . Folglich ist  $Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$  absolut konvergent.

(2). Weiterhin ist  $\sum_{i=0}^m |a_{ij}| \leq \beta$  für alle  $m$ . Damit ist auch  $S_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$  absolut konvergent.

(3). Es ist auch  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n |a_{ij}| \leq \beta$  für alle  $m, n$ .

Nach Behauptung (1) existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| := \alpha_i$ . Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n |a_{ij}|}_{\leq \beta} = \sum_{i=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| = \sum_{i=0}^m \alpha_i \leq \beta.$$

Weiterhin ist

$$|Z_i| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=0}^n a_{ij} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| = \alpha_i.$$

Also gilt stets

$$\sum_{i=0}^m |Z_i| \leq \sum_{i=0}^m \alpha_i \leq \beta.$$

Folglich ist  $\sum Z_i$  absolut konvergent.

Analog zeigt man die absolute Konvergenz von  $\sum S_j$ .

Es sei nun  $\varepsilon > 0$ . Dann existieren nach Voraussetzung bzw. nach den obigen Ausführungen natürliche Zahlen  $n_1, n_2$ , so daß für alle  $n \geq n_1$  und alle  $k \geq 0$  gilt:

$$|b_1 + \cdots + b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \\ \beta_{n_2+1} + \cdots + \beta_{n_2+k} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\star)$$

Sei  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . In der Aufzählung  $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n_0)$  kommen nur endlich viele Paare  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  vor. Folglich existiert ein  $m_0$ , so daß  $\varphi(0), \dots, \varphi(n_0)$  schon in der Menge  $\{(i, j) : i \leq m_0, j \leq m_0\}$  auftreten.

Wählt man  $m, n \geq m_0$ , dann ist

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} - b \right| = |b_1 + \cdots + b_{n_0} - b + r|,$$

wobei  $r$  eine endliche Summe ist, die aus gewissen Gliedern  $a_{ij} := b_\nu$  besteht, deren Indizes  $\nu$  größer als  $n_0$  sind.

Wegen  $(\star)$  folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung  $|r| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Also erhält man für alle  $m, n \geq n_0$ :

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} - b \right| \leq |b_1 + \cdots + b_{n_0} - b| + |r| < \varepsilon. \quad (\star\star)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  in  $(\star\star)$  erhält man

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} - b \right| = \left| \sum_{i=0}^m Z_i - b \right| \leq \varepsilon.$$

(Die Konvergenz der inneren Reihe ist schon nachgewiesen.)

Für  $m \rightarrow \infty$  entsteht

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} Z_i - b \right| \leq \varepsilon \quad \implies \quad \sum_{i=0}^{\infty} Z_i = b.$$

Wegen  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}$  erhält man aus  $(\star\star)$  analog

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} S_j - b \right| \leq \varepsilon \quad \implies \quad \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b. \quad \square$$