

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Beispiele.

2. (Die Glieder einer Reihe dürfen nicht beliebig „umsortiert“ werden.)

4/1/30/2

Wir betrachten die Reihe aus Beispiel 1 und nehmen an, daß man die Glieder einer Reihe beliebig umsortieren darf, ohne das Konvergenzverhalten zu verändern. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots && \text{(umsortiert)} \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \pm \dots}_{=0} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots && \text{(0 addiert)} \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \dots && \text{(umsortiert)} \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \dots \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \pm \dots = 0 \quad \text{!} && \text{(umsortiert und addiert)}
 \end{aligned}$$

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Wir haben schon gezeigt, daß konvergente Reihen nicht beliebig umgeordnet werden dürfen (vgl. Beispiel 2 := 4/1/30/2). Mit Hilfe einer Definition sollen die Reihen hervorgehoben werden, bei denen dies erlaubt ist.

4/2/7