

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Satz 4.2** (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen) 4/1/6

$\sum a_i$  ist konvergent gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert, so daß für jedes  $m, n > n_0$  gilt:  $|S_m - S_n| < \varepsilon$ .

**Korollar 1.**  $\sum a_i$  konvergiert gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert, so daß 4/1/8  
für jedes  $n \geq n_0$  und für jedes  $k \geq 1$  gilt:  $|a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$ .

**Korollar 2.** Wenn  $\sum a_i$  konvergiert, dann ist  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$ . 4/1/10

**Korollar 3.** Ist  $(a_i)$  keine Nullfolge, so ist  $\sum a_i$  divergent. 4/1/12

**Satz 4.6** (Leibniz-Kriterium) 4/1/26

Ist  $\sum a_i$  alternierend und  $\lim a_i = 0$  und  $(|a_i|)_{i=0,1,2,\dots}$  monoton fallend, dann ist  $\sum a_i$  konvergent.

**Satz 4.8** (Majorantenkriterium) 4/1/32

Es seien  $\sum a_i, \sum b_i$  Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei  $\sum b_i$  eine Majorante von  $\sum a_i$ . Dann gilt:

- (1) Ist  $\sum b_i$  konvergent, so ist auch  $\sum a_i$  konvergent.
- (2) Ist  $\sum a_i$  divergent, so ist auch  $\sum b_i$  divergent.

**Satz 4.9** (Wurzelkriterium) 4/1/35

Es sei  $(a_i)$  eine beliebige Folge. Dann gilt:

- (1) Existiert ein  $q$  mit  $0 < q < 1$ , so daß für jedes  $i$  gilt:  $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ ,  
dann ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.
- (2) Ist  $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$  für alle  $i$ , dann ist  $\sum a_i$  divergent.

**Satz 4.10** (Quotientenkriterium) 4/1/38

Es sei  $a_i \neq 0$  für jedes  $i$ . Dann gilt:

- (1) Existiert ein  $q$  mit  $0 < q < 1$ , so daß für jedes  $i$  gilt:  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$ ,  
dann ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.
- (2) Ist  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$  für jedes  $i$ , dann ist  $\sum a_i$  divergent.

## 4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

**Satz 4.12** *Eine absolut konvergente Reihe konvergiert unbedingt und zwar immer gegen denselben Wert.* 4/2/9

(D.h., für absolut konvergente Reihen gilt das allgemeinste Kommutativgesetz.)

## 4.3 Komplexe Zahlen

**Bemerkung.** Für Reihen mit komplexen Gliedern gelten insbesondere:

4/3/14

- das Cauchysche Konvergenzkriterium und die daraus resultierenden Korollare;
- das Wurzel- und Quotientenkriterium;
- absolute Konvergenz zieht Konvergenz nach sich.

Nicht verwendbar (weil die Ordnung benutzt wird) sind das Leibnizkriterium und das Majorantenkriterium. (Das Majorantenkriterium läßt sich jedoch in manchen Fällen für die absolute Konvergenz nutzen, indem man z.B. eine konvergente Majorante von  $\sum |z_n|$  zu finden versucht.)