

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

**I.  $\mathbb{R}$  ist ein Körper** (d.h., in  $\mathbb{R}$  gelten folgende 10 Eigenschaften:)

2/1/1

- (1)  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,
- (2)  $x + y = y + x$ ,
- (3) Es existiert ein Element  $0$  in  $\mathbb{R}$ , so daß für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $x + 0 = x$ .

**Bemerkung.** Aus (2) und (3) folgt sofort, daß es genau ein solches Element  $0$  in  $\mathbb{R}$  gibt. Denn sind  $0_1, 0_2$  Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

- (4) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  existiert ein  $y \in \mathbb{R}$ , so daß  $x + y = 0$ .

**Bemerkung.** Aus (1) – (4) folgt, daß es für jedes  $x \in \mathbb{R}$  genau ein  $y \in \mathbb{R}$  gibt mit  $x + y = 0$ . Wir zeigen, daß  $y$  durch  $x$  tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

Dazu sei  $x$  gegeben.

Angenommen, es gibt Elemente  $y, z$ , so daß  $x + y = 0$  und  $x + z = 0$ . Dann gilt:

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z + 0 = z.$$

Dieses durch  $x$  eindeutig bestimmte  $y$  wird mit  $y := -x$  bezeichnet.

Die Eigenschaften (1) – (4) sind die Axiome für eine (*additive*) *abelsche Gruppe*.

- (5)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ,
- (6)  $x \cdot y = y \cdot x$ ,
- (7) Es existiert ein Element  $1$  in  $\mathbb{R}$ , so daß für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $x \cdot 1 = x$ .

**Bemerkung.** Analog wie bei (3) gibt es genau ein solches Element  $1$ . Denn wären  $1_1, 1_2$  Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2.$$

- (8) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0$  existiert ein  $y \in \mathbb{R}$  mit  $x \cdot y = 1$ .

**Bemerkung.** Analog wie zu (4) zeigt man, daß  $y$  durch  $x$  eindeutig bestimmt ist; der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Dieses durch  $x$  eindeutig bestimmte  $y$  wird mit  $y := x^{-1} = \frac{1}{x}$  bezeichnet.

- (9)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

**Bemerkung.** Aus den obigen Axiomen erhält man:  $x \cdot 0 = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

Es ist  $x = x \cdot 1 = x \cdot (\underbrace{1 + 0}_{=x}) = x + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$ . Nach den Axiomen (2) und (3) gibt es genau ein Element  $0$ , so daß  $x = x + 0$ . Da auch  $x = x + x \cdot 0$  ist, muß dann  $x \cdot 0$  dieses Element  $0$  sein.

- (10)  $0 \neq 1$ .

## Kapitel 4

## Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.3 Komplexe Zahlen

**Satz 4.16** Mit den definierten Operationen (Addition und Multiplikation von Paaren) bildet  $\mathbb{R}^2$  einen Körper  $\mathbb{C}$  (den Körper der komplexen Zahlen). 4/3/3

**Beweis.** Die Körperaxiome (1) – (4) (vgl. Eigenschaften reeller Zahlen) gelten schon, da  $\mathbb{R}^2$  als Vektorraum insbesondere eine additive abelsche Gruppe bildet mit  $\mathbf{0} = (0, 0)$  als neutralem Element bez.  $+$  und  $(-a, -b)$  als inverses Element von  $(a, b)$ . 4/3/4

Es bleiben noch (5) – (10) zu beweisen, d.h., für alle  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$  gilt:

(5)  $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3,$

(6)  $z_1 z_2 = z_2 z_1.$

(7) Es existiert ein Element  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^2$ , so daß  $z \cdot \mathbf{1} = z$  für jedes  $z \in \mathbb{R}^2$ .

(8) Für jedes  $z \in \mathbb{R}^2$  mit  $z \neq 0$ , existiert ein  $u \in \mathbb{R}^2$ , so daß  $z \cdot u = \mathbf{1}$ .

(9)  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$

(10)  $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}.$

Wir werden nicht alle diese Eigenschaften nachweisen.

Zu (6). Es sei  $z_1 = (a_1, b_1)$  und  $z_2 = (a_2, b_2) \implies$

$$z_1 z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \text{ und}$$

$$z_2 z_1 = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1) = (a_2 a_1 - b_2 b_1, a_2 b_1 + b_2 a_1)$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \implies$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

(5) und (9) analog!

(7).  $\mathbf{1} = (1, 0)$  leistet das Verlangte.

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b).$$

(8). Es sei  $z = (a, b) \neq (0, 0) \implies a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ , und dies gilt gdw  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

Behauptung:  $u = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$  leistet das Verlangte.

Für  $c := a^2 + b^2$  gilt:

$$\begin{aligned} z \cdot u &= (a, b) \cdot \left( \frac{a}{c}, -\frac{b}{c} \right) = \left( \frac{a^2}{c} - \left( -\frac{b^2}{c} \right), -\frac{ab}{c} + \frac{ba}{c} \right) \\ &= \left( \frac{a^2 + b^2}{c}, 0 \right) = (1, 0) = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

(10).  $(1, 0) \neq (0, 0)$  trivial!  $\square$