

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.3 Komplexe Zahlen

Wir führen jetzt die *komplexen Zahlen* ein, um sie für die Behandlung von sog. Potenzreihen zur Verfügung zu haben. 4/3/0

Wir setzen als bekannt voraus, daß $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \mathbb{R}^2$ einen zweidimensionalen Vektorraum mit den folgenden Operationen bildet:

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{\text{Def}}{=} (a + c, b + d) \quad (\text{Addition von Elementen aus } \mathbb{R}^2), \quad 4/3/1$$

$$c \cdot (a, b) \stackrel{\text{Def}}{=} (ca, cb) \quad (\text{Multiplikation mit reellen Zahlen}).$$

Zur geometrischen Veranschaulichung der komplexen Zahlen betrachten wir in \mathbb{R}^2 die kanonische Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ und erhalten so ein rechtwinkliges Koordinatensystem für \mathbb{R}^2 , mit dessen Hilfe sich die Elemente aus \mathbb{R}^2 als Punkte in der Ebene darstellen lassen (*Gaußsche Zahlenebene*).

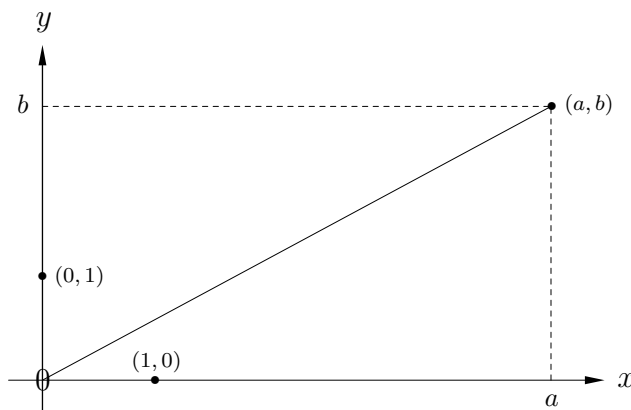


Abb. 4.1 Gaußsche Zahlenebene zur Darstellung der komplexen Zahlen

Jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich eindeutig als Linearkombination der Basis darstellen. Die folgenden Teilmengen $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ bilden wichtige eindimensionale Teilräume, die mit den entsprechenden Koordinatenachsen identifiziert werden können.

Wir führen jetzt eine Multiplikation von Paaren in \mathbb{R}^2 ein. 4/3/2

$$\text{Es sei } (a, b) \cdot (c, d) \stackrel{\text{Def}}{=} (ac - bd, ad + bc).$$

Damit erhält man das folgende Resultat.

Satz 4.16 *Mit den definierten Operationen (Addition und Multiplikation von Paaren) bildet \mathbb{R}^2 einen Körper \mathbb{C} (den Körper der komplexen Zahlen).* 4/3/3

Beweis. Die Körperaxiome (1) – (4) (vgl. Eigenschaften reeller Zahlen) gelten schon, da \mathbb{R}^2 als Vektorraum insbesondere eine additive abelsche Gruppe bildet mit $\mathbf{0} = (0, 0)$ als neutralem Element bez. $+$ und $(-a, -b)$ als inversem Element von (a, b) . 4/3/4

Es bleiben noch (5) – (10) zu beweisen, d.h., für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(5) \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3,$$

$$(6) \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

$$(7) \quad \text{Es existiert ein Element } \mathbf{1} \in \mathbb{R}^2, \text{ so daß } z \cdot \mathbf{1} = z \text{ für jedes } z \in \mathbb{R}^2.$$

$$(8) \quad \text{Für jedes } z \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } z \neq 0, \text{ existiert ein } u \in \mathbb{R}^2, \text{ so daß } z \cdot u = \mathbf{1}.$$

$$(9) \quad z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

$$(10) \quad \mathbf{1} \neq \mathbf{0}.$$

Wir werden nicht alle diese Eigenschaften nachweisen.

Zu (6). Es sei $z_1 = (a_1, b_1)$ und $z_2 = (a_2, b_2) \implies$

$$z_1 z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \text{ und}$$

$$z_2 z_1 = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1) = (a_2 a_1 - b_2 b_1, a_2 b_1 + b_2 a_1)$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \implies$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

(5) und (9) analog!

(7). $\mathbf{1} = (1, 0)$ leistet das Verlangte.

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b).$$

(8). Es sei $z = (a, b) \neq (0, 0) \implies a \neq 0$ oder $b \neq 0$, und dies gilt gdw $a^2 + b^2 \neq 0$.

Behauptung: $u = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ leistet das Verlangte.

Für $c := a^2 + b^2$ gilt:

$$z \cdot u = (a, b) \cdot \left(\frac{a}{c}, -\frac{b}{c} \right) = \left(\frac{a^2}{c} - \left(-\frac{b^2}{c} \right), -\frac{ab}{c} + \frac{ba}{c} \right)$$

$$= \left(\frac{a^2 + b^2}{c}, 0 \right) = (1, 0) = \mathbf{1}.$$

(10). $(1, 0) \neq (0, 0)$ trivial! \square

Bemerkung. Man kann mit komplexen Zahlen im Prinzip rechnen wie mit reellen Zahlen, allerdings ist in \mathbb{C} keine Ordnung definiert. 4/3/5

Wir haben uns schon überlegt, daß $\{(1, 0), (0, 1)\}$ eine Basis für den Vektorraum \mathbb{R}^2 bildet. Der Teilraum $\{x \cdot (1, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ von \mathbb{R}^2 ist offenbar isomorph mit \mathbb{R}

(als 1-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R}). Daher identifizieren wir in Zukunft $(1, 0)$ mit 1 . Für $(0, 1)$ schreibt man auch i (nicht zu verwechseln mit natürlichen Zahlen i), so daß durch $\{1, i\}$ eine Basis für \mathbb{R}^2 gegeben ist.

Mit dieser Vereinbarung gilt

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

Für $a \cdot 1$ bzw. für $b \cdot i$ schreiben wir kurz a bzw. ib . Damit erhält man eine geeignete Darstellung für komplexe Zahlen:

$$(a, b) = a + ib, \quad (0, 0) = 0 + i0 := 0.$$

Bez.: In $z = x + iy$ heißt x *Realteil* ($:= \operatorname{Re}(z)$) und y *Imaginärteil* ($:= \operatorname{Im}(z)$) von z .

Bemerkung. Aus der Definition der Multiplikation für komplexe Zahlen ergibt sich 4/3/6

$$i \cdot i = i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = (-1) \cdot (1, 0) = -1.$$

und weiterhin

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Berechnet man das Produkt (formal) wie in einem Körper, so entsteht dasselbe Ergebnis:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + \underbrace{ib \cdot id}_{i^2 \cdot db} = ac - bd + i \cdot (ad + bc).$$

Definition. (*Betrag für komplexe Zahlen*) 4/3/7

Es sei $z = x + iy$.

$$|z| \stackrel{\text{Df}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Bez.: $|z|$ heißt *Betrag* von z und
 $|z_1 - z_2|$ heißt *Abstand* zwischen z_1 und z_2 .

Satz 4.17 Für komplexe Zahlen z, z_1, z_2 gilt: 4/3/8

- (1) $|z| \geq 0$, und $|z| = 0 \iff z = 0$,
- (2) $|-z| = |z|$, ($\implies |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$)
- (3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, ($\implies |z^n| = |z|^n$)
- (4) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, falls $z_2 \neq 0$,
- (5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
- (6) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Beweis. (1). Sei $z = a + ib$. Dann gilt

4/3/9

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0; \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0.$$

(2). Trivial!

(3). Sei $z_n = a_n + ib_n$, $n = 1, 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |a_1 a_2 + i^2 \cdot b_1 b_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2| \\ &= |a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)| \\ &= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 b_1 a_2 + b_1^2 a_2^2} \\ &= \sqrt{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(b_2^2 + a_2^2)} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

(4). Es genügt zu zeigen: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, denn

$$\left|\frac{u}{z}\right| = \left|u \cdot \frac{1}{z}\right| = |u| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| = |u| \cdot \frac{1}{|z|} = \frac{|u|}{|z|}.$$

Wir wissen schon, daß für $z = a + ib$ und $c := a^2 + b^2$ gilt:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{c} + i \frac{-b}{c} \implies$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}.$$

(5). Es sei $z_n = a_n + ib_n$, $n = 1, 2$. Dann ist die linke Seite ls von (5):

$$ls := |a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2| = |a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

und die rechte Seite rs ist:

$$rs := |a_1 + ib_1| + |a_2 + ib_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Offenbar sind $ls, rs \geq 0$. Folglich ist

$$ls \leq rs \iff ls^2 \leq rs^2 \iff$$

$$(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2) + 2\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + (a_2^2 + b_2^2) \iff$$

$$2(\underbrace{a_1 a_2 + b_1 b_2}_{:= (\star)}) \leq 2 \cdot \underbrace{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}_{:= (\star\star)}.$$

Ist $(\star) < 0$, dann gilt offenbar die letzte Ungleichung und damit $ls \leq rs$.

Es sei jetzt $(\star) \geq 0$. dann ist

$$(\star) \leq (\star\star) \iff (\star)^2 \leq (\star\star)^2 \iff$$

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \iff$$

$$a_1^2 a_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 \leq a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 \iff$$

$$0 \leq (a_1 b_2)^2 - 2a_1 b_2 b_1 a_2 + (b_1 a_2)^2 = (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2.$$

Damit gilt insgesamt $ls \leq rs$.

(6). Der Beweis hierzu erfolgt durch ähnliche Überlegungen. \square

Bemerkung. Da die komplexen Zahlen einen Körper bilden, kann man mit ihnen 4/3/10
entsprechend der Axiome I(1 – 10) rechnen (vgl. Kapitel 2, 2/1/1). Insbesondere lassen
sich in \mathbb{C} analog wie in \mathbb{R} Folgen und Reihen bilden. Alle Definitionen und Sätze für
Folgen und Reihen (mit reellen Zahlen), bei denen die Ordnung der Glieder **keine** Rolle
spielt, gelten entsprechend auch für die komplexen Zahlen. Insbesondere hat man:

Definition. (*Konvergenz*)

4/3/11

Es sei $(z_n) = (a_n + ib_n)_{n=0,1,2,\dots}$ eine Folge von komplexen Zahlen und $z = a + ib$.

(z_n) konvergiert gegen z

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|z_n - z| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim z_n = z$ (oder $z_n \rightarrow z$).

Satz 4.18 $(z_n) = (a_n + ib_n)$ konvergiert gegen $z = a + ib$ gdw $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. 4/3/12
(Konvergenz in \mathbb{C} bedeutet also komponentenweise Konvergenz.)

Beweis. Es ist $|z_n - z| = |a_n + ib_n - (a + ib)| = |a_n - a + i(b_n - b)| \leq |a_n - a| + \underbrace{|i|}_{=1} \cdot |b_n - b|$. 4/3/13

(\longleftarrow) Wenn $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$, dann gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Folglich ist

$$|z_n - z| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad z_n \rightarrow z.$$

$$(\longrightarrow) \quad |z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon \quad (\text{für fast alle } n) \implies$$

$$(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < \varepsilon^2 \implies$$

$$(a_n - a)^2, (b_n - b)^2 < \varepsilon^2 \implies$$

$$|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon \implies$$

$$a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow b. \quad \square$$

Bemerkung. Für Reihen mit komplexen Gliedern gelten insbesondere:

4/3/14

- das Cauchysche Konvergenzkriterium und die daraus resultierenden Korollare;
- das Wurzel- und Quotientenkriterium;
- absolute Konvergenz zieht Konvergenz nach sich.

Nicht verwendbar (weil die Ordnung benutzt wird) sind das Leibnizkriterium und das Majorantenkriterium. (Das Majorantenkriterium läßt sich jedoch in manchen Fällen für die absolute Konvergenz nutzen, indem man z.B. eine konvergente Majorante von $\sum |z_n|$ zu finden versucht.)