

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.4 Potenzreihen

#### Beispiele.

1. Es sei  $a_n = \frac{1}{n!}$ ,  $a = 0$ , also  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . 4/4/3/1

Diese Reihe konvergiert (nach dem Quotientenkriterium) für alle reellen oder komplexen  $x$ .

2. Sei  $a_n = n$ ,  $a = 0$ , also  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$ . 4/4/3/2

Diese Reihe konvergiert für alle  $|x| < 1$  und divergiert für alle  $|x| > 1$  (man kann wieder das Quotientenkriterium benutzen). Der Fall  $|x| = 1$  muß gesondert untersucht werden.

Offenbar ist aber  $(n \cdot |x|)$  keine Nullfolge, folglich ist die Reihe für  $|x| = 1$  divergent.

3. Sei  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $a = 0$ , also  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot x^n$ . 4/4/3/3

Diese Reihe konvergiert für alle  $|x| < 1$  und divergiert für alle  $|x| > 1$ . Für  $x = 1$  erhält man die harmonische Reihe, die bekanntlich nicht konvergiert, und für  $x = -1$  entsteht eine spezielle alternierende Reihe, die (nach dem Leibnizkriterium) konvergiert.

Für komplexe  $x$  mit  $|x| = 1$  und  $x \neq \pm 1$  müßten gesonderte Untersuchungen durchgeführt werden.

4. Sei  $a_n = n^n$ ,  $a = 0$ , also  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n$ . 4/4/3/4

Diese Reihe konvergiert nur für  $x = 0$ .

**Definition.** (Konvergenzradius) 4/4/5

Es sei  $\varrho$  eine nicht-negative reelle Zahl oder  $\varrho = \infty$ .

$\varrho$  heißt *Konvergenzradius* von  $\sum a_n(x-a)^n$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x$  gilt: Wenn  $|x-a| < \varrho$ , so ist  $\sum a_n(x-a)^n$  absolut konvergent, und wenn  $|x-a| > \varrho$ , so ist  $\sum a_n(x-a)^n$  divergent.

(Hierbei soll immer gelten:  $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$  bzw.  $= \mathbb{C}$  und  $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$ .)

**Satz 4.21** Es sei  $\sum a_n(x-a)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\varrho$ , 4/4/13  
und es sei  $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Dann gilt:

(1) Wenn  $0 < l < \infty$ , so  $\varrho = \frac{1}{l}$ .

(2) Wenn  $l = 0$ , so  $\varrho = \infty$ .

(3) Wenn  $l = \infty$ , so  $\varrho = 0$ .

**Bemerkung.** Da einer der drei Fälle immer auftritt, kann man auf diese Weise den Konvergenzradius bestimmen. Zur Übung untersuche man noch einmal die letzten Beispiele 1. – 4. Existieren  $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$  bzw.  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  oder haben sie den uneigentlichen Grenzwert  $\infty$ , dann ist  $l = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$  bzw.  $l = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  (in Satz 4.21). Dies kann bei der Bestimmung des Konvergenzradius genutzt werden.