

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

Definition. (Divergenz von Reihen)

4/1/2

$\sum a_i$ ist divergent $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum a_i$ ist nicht konvergent.

Definition. (alternierende Reihe)

4/1/24

$\sum a_i$ heißt alternierend
 $\stackrel{\text{Df}}{=} a_i \neq 0$ und $a_i < 0$ gdw $a_{i+1} > 0$ für jedes i
 (oder aber $a_i \cdot a_{i+1} < 0$ für jedes i).

Satz 4.6 (Leibniz-Kriterium)

4/1/26

Ist $\sum a_i$ alternierend und $\lim a_i = 0$ und $(|a_i|)_{i=0,1,2,\dots}$ monoton fallend,
 dann ist $\sum a_i$ konvergent.

Beispiele.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Wir betrachten jetzt die 2^n -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n}$$

(jeder dieser 2^n Summanden ist größer oder gleich $\frac{1}{2^{n+1}}$)

$$\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 S_{2^n} &= S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \cdots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n} \\
 &= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \\
 &\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Die Teilfolge (S_{2^i}) von (S_n) ist also unbeschränkt, und somit ist $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent.

Da (S_n) monoton wächst, ist $\sum \frac{1}{n}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Beispiele.

3. Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $a = 0$, also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot x^n$.

4/4/3/3

Diese Reihe konvergiert für alle $|x| < 1$ und divergiert für alle $|x| > 1$. Für $x = 1$ erhält man die harmonische Reihe, die bekanntlich nicht konvergiert, und für $x = -1$ entsteht eine spezielle alternierende Reihe, die (nach dem Leibnizkriterium) konvergiert.

Für komplexe x mit $|x| = 1$ und $x \neq \pm 1$ müßten gesonderte Untersuchungen durchgeführt werden.