

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Beispiele.

$$1. \text{ Es sei } a_n = \frac{1}{n!}, a = 0, \text{ also } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

4/4/3/1

Diese Reihe konvergiert (nach dem Quotientenkriterium) für alle reellen oder komplexen x .

$$2. \text{ Sei } a_n = n, a = 0, \text{ also } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n.$$

4/4/3/2

Diese Reihe konvergiert für alle $|x| < 1$ und divergiert für alle $|x| > 1$ (man kann wieder das Quotientenkriterium benutzen). Der Fall $|x| = 1$ muß gesondert untersucht werden.

Offenbar ist aber $(n \cdot |x|)$ keine Nullfolge, folglich ist die Reihe für $|x| = 1$ divergent.

$$3. \text{ Sei } a_n = \frac{1}{n}, a = 0, \text{ also } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot x^n.$$

4/4/3/3

Diese Reihe konvergiert für alle $|x| < 1$ und divergiert für alle $|x| > 1$. Für $x = 1$ erhält man die harmonische Reihe, die bekanntlich nicht konvergiert, und für $x = -1$ entsteht eine spezielle alternierende Reihe, die (nach dem Leibnizkriterium) konvergiert.

Für komplexe x mit $|x| = 1$ und $x \neq \pm 1$ müßten gesonderte Untersuchungen durchgeführt werden.

$$4. \text{ Sei } a_n = n^n, a = 0, \text{ also } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n.$$

4/4/3/4

Diese Reihe konvergiert nur für $x = 0$.

Bemerkung. Die Konvergenzgebiete der untersuchten Potenzreihen sind recht unterschiedlich.

4/4/4

Die Reihe in dem ersten Beispiel konvergiert für alle Elemente in \mathbb{R} bzw. in \mathbb{C} (je nachdem, ob man nur reelle oder auch komplexe Zahlen zuläßt).

In dem zweiten Beispiel konvergiert die Reihe in dem offenen Intervall $(-1, 1)$ und divergiert außerhalb (im reellen Fall) bzw. sie konvergiert in der offenen Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$, und sie divergiert außerhalb (im komplexen Fall).

Das dritte Beispiel zeigt, daß es auf dem *Rand* des Konvergenzgebietes einer Potenzreihe (d.h. in den Endpunkten des Intervalls bzw. auf der Kreislinie) Punkte geben kann, wo die Reihen

konvergieren bzw. divergieren.

Im vierten Beispiel ist eine Reihe gegeben, deren Konvergenzgebiet auf einen Punkt zusammenschrumpft.

In den betrachteten Beispielen, konvergieren die Potenzreihen stets innerhalb eines offenen Intervalls bzw. Kreises und sie divergieren außerhalb; auf dem Rande ist beides möglich. (Kreise bzw. Intervalle dürfen auch ausarten zu ganz \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} oder zu einem Punkt.)

Wir wollen jetzt untersuchen, ob dies für alle Potenzreihen immer der Fall ist. Dazu formulieren wir zunächst eine Definition.