

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.4 Potenzreihen

Einen wichtigen Spezialfall für Reihen bilden die sog. Potenzreihen.

4/4/0

**Definition.** (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei  $(a_n)$  eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und  $a, x$  seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  *Potenzreihe* in  $x-a$  mit den *Koeffizienten*  $a_n$ .

**Achtung:** Der Bequemlichkeit halber verabreden wir für Potenzreihen (**und nur für Potenzreihen**), daß stets  $(x-a)^0 = 1$  ist, auch für  $x=a$ .

4/4/2

Es erhebt sich die Frage: Für welche (reellen oder komplexen) Zahlen  $x$  ist die Potenzreihe  $\sum a_n(x-a)^n$  für fixiertes  $a$  konvergent?

**Beispiele.**

$$1. \text{ Es sei } a_n = \frac{1}{n!}, a = 0, \text{ also } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

4/4/3/1

Diese Reihe konvergiert (nach dem Quotientenkriterium) für alle reellen oder komplexen  $x$ .

$$2. \text{ Sei } a_n = n, a = 0, \text{ also } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n.$$

4/4/3/2

Diese Reihe konvergiert für alle  $|x| < 1$  und divergiert für alle  $|x| > 1$  (man kann wieder das Quotientenkriterium benutzen). Der Fall  $|x| = 1$  muß gesondert untersucht werden.

Offenbar ist aber  $(n \cdot |x|)$  keine Nullfolge, folglich ist die Reihe für  $|x| = 1$  divergent.

$$3. \text{ Sei } a_n = \frac{1}{n}, a = 0, \text{ also } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot x^n.$$

4/4/3/3

Diese Reihe konvergiert für alle  $|x| < 1$  und divergiert für alle  $|x| > 1$ . Für  $x = 1$  erhält man die harmonische Reihe, die bekanntlich nicht konvergiert, und für  $x = -1$  entsteht eine spezielle alternierende Reihe, die (nach dem Leibnizkriterium) konvergiert.

Für komplexe  $x$  mit  $|x| = 1$  und  $x \neq \pm 1$  müßten gesonderte Untersuchungen durchgeführt werden.

$$4. \text{ Sei } a_n = n^n, a = 0, \text{ also } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n.$$

4/4/3/4

Diese Reihe konvergiert nur für  $x = 0$ .

**Bemerkung.** Die Konvergenzgebiete der untersuchten Potenzreihen sind recht unterschiedlich. 4/4/4

Die Reihe in dem ersten Beispiel konvergiert für alle Elemente in  $\mathbb{R}$  bzw. in  $\mathbb{C}$  (je nachdem, ob man nur reelle oder auch komplexe Zahlen zuläßt).

In dem zweiten Beispiel konvergiert die Reihe in dem offenen Intervall  $(-1, 1)$  und divergiert außerhalb (im reellen Fall) bzw. sie konvergiert in der offenen Kreisscheibe  $\{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$ , und sie divergiert außerhalb (im komplexen Fall).

Das dritte Beispiel zeigt, daß es auf dem *Rand* des Konvergenzgebietes einer Potenzreihe (d.h. in den Endpunkten des Intervalls bzw. auf der Kreislinie) Punkte geben kann, wo die Reihen konvergieren bzw. divergieren.

Im vierten Beispiel ist eine Reihe gegeben, deren Konvergenzgebiet auf einen Punkt zusammenschrumpft.

In den betrachteten Beispielen, konvergieren die Potenzreihen stets innerhalb eines offenen Intervalls bzw. Kreises und sie divergieren außerhalb; auf dem Rande ist beides möglich. (Kreise bzw. Intervalle dürfen auch ausarten zu ganz  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  oder zu einem Punkt.)

Wir wollen jetzt untersuchen, ob dies für alle Potenzreihen immer der Fall ist. Dazu formulieren wir zunächst eine Definition.

**Definition.** (*Konvergenzradius*) 4/4/5

Es sei  $\varrho$  eine nicht-negative reelle Zahl oder  $\varrho = \infty$ .

$\varrho$  heißt *Konvergenzradius* von  $\sum a_n(x - a)^n$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x$  gilt: Wenn  $|x - a| < \varrho$ , so ist  $\sum a_n(x - a)^n$  absolut konvergent, und wenn  $|x - a| > \varrho$ , so ist  $\sum a_n(x - a)^n$  divergent.

(Hierbei soll immer gelten:  $\{x : |x - a| < \infty\} = \mathbb{R}$  bzw.  $= \mathbb{C}$  und  $\{x : |x - a| > \infty\} = \emptyset$ .)

Wir werden nun zeigen, daß Potenzreihen tatsächlich immer innerhalb eines Intervalls bzw. Kreises konvergieren und außerhalb divergieren (der Radius des Kreises erweist sich als Konvergenzradius). 4/4/6

**Bemerkung.** Im folgenden betrachten wir Potenzreihen in  $\mathbb{C}$ . Wegen  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  gelten die Resultate auch für  $\mathbb{R}$ , falls die Koeffizienten  $a_n$  und  $a$  in  $\mathbb{R}$  liegen.

**Satz 4.19** Es seien  $a_n, a \in \mathbb{C}$ . 4/4/7

- (1) Ist  $\sum a_n(x - a)^n$  an einer Stelle  $x = x_0$  konvergent, dann ist  $\sum a_n(x - a)^n$  für alle  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x - a| < |x_0 - a|$  absolut konvergent.
- (2) Ist  $\sum a_n(x - a)^n$  an einer Stelle  $x = x_1$  divergent, dann ist  $\sum a_n(x - a)^n$  für alle  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x - a| > |x_1 - a|$  divergent.

**Beweis.** (1). Ist  $x_0 = a$ , dann existiert kein  $x$  mit  $|x - a| < |x_0 - a|$ . Damit ist 4/4/8 die Behauptung trivialerweise erfüllt.

Es sei jetzt  $x_0 \neq a$ . Nach Voraussetzung ist die Reihe in  $x_0$  konvergent. Folglich ist  $(a_n(x_0 - a)^n)$  eine Nullfolge, und somit ist  $|a_n(x_0 - a)^n| \leq 1$  für fast alle  $n$ .

Sei  $x$  jetzt beliebig aber fixiert mit der Eigenschaft  $|x - a| < |x_0 - a|$ . Dann gilt

$$0 \leq \frac{|x - a|}{|x_0 - a|} := q < 1.$$

Hieraus konstruieren wir eine konvergente Majorante für  $\sum |a_n(x - a)^n|$ . Es ist

$$|a_n(x - a)^n| = \left| a_n \cdot \frac{(x - a)^n}{(x_0 - a)^n} \cdot (x_0 - a)^n \right| =$$

$$\underbrace{|a_n(x_0 - a)^n|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{(x - a)^n}{(x_0 - a)^n} \right|}_{= q^n} \leq q^n \quad \text{und} \quad 0 \leq q < 1.$$

$\sum q^n$  ist als geometrische Reihe für  $|q| < 1$  konvergent, folglich ist  $\sum q^n$  eine konvergente Majorante von  $\sum |a_n(x - a)^n|$ . Daher ist  $\sum a_n(x - a)^n$  absolut konvergent für  $x$ .

(2). Sei  $|x - a| > |x_1 - a|$  und  $\sum a_n(x_1 - a)^n$  divergent. Wäre  $\sum a_n(x - a)^n$  konvergent, dann wäre  $\sum a_n(x_1 - a)^n$  nach (1) absolut konvergent. ~~N!~~  $\square$

4/4/9

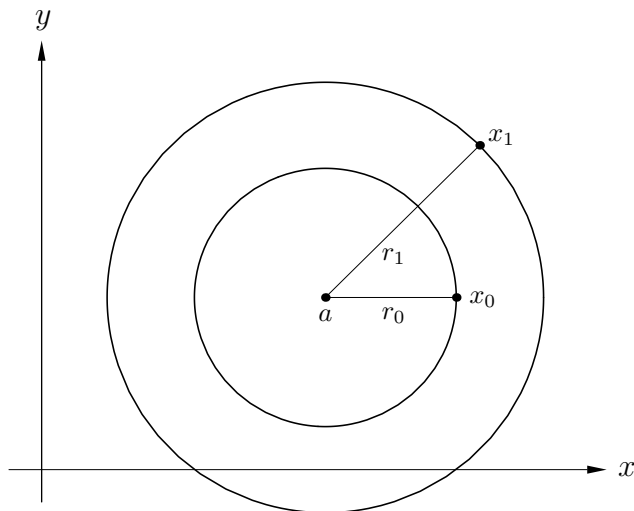


Abb. 4.2 In dem Kreis  $\{x : |x - a| < r_0\}$  ist  $\sum a_n(x - a)^n$  absolut konvergent, und für alle  $x$  mit der Eigenschaft  $|x - a| > r_1$  ist  $\sum a_n(x - a)^n$  divergent.

**Satz 4.20** Jede Potenzreihe besitzt einen Konvergenzradius  $\varrho$ , der auch 0 oder  $\infty$  sein kann. 4/4/10

**Beweis.** Sei  $\sum a_n(x-a)^n$  eine beliebige Potenzreihe.

4/4/11

1. Fall: Die Reihe konvergiert nur für  $x = a$ . Dann ist  $\varrho = 0$ .

2. Fall: Die Reihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{C}$ . Dann konvergiert die Reihe absolut für alle  $x$  (nach Satz 4.19). Folglich ist  $\varrho = \infty$ .

3. Fall:  $\sum a_n(x-a)^n$  konvergiert für ein  $x_0 \neq a$  und divergiert für ein  $x_1$  (vgl. Abb. 4.2).

Es sei

$M = \{r \in \mathbb{R} : \text{es gibt ein } x \in \mathbb{C}, \text{ so daß } |x-a| = r \text{ und } \sum a_n(x-a)^n \text{ konvergiert}\}.$

Dann ist  $M \neq \emptyset$ , denn  $0 \in M$ .

Es sei  $r_1 = |x_1 - a|$ . Nach Voraussetzung ist  $\sum a_n(x_1 - a)^n$  divergent. Folglich gilt (nach Satz 4.19(2)): Wenn  $r' > r_1$ , so ist  $r' \notin M$ . Dann ist  $M$  nach oben beschränkt (z.B. durch  $r_1$ ), besitzt also ein Supremum; es sei  $\varrho := \sup M$ .

Behauptung:  $\varrho$  ist der Konvergenzradius von  $\sum a_n(x-a)^n$ .

z.z.: 1. Wenn  $|x-a| < \varrho$ , so ist  $\sum a_n(x-a)^n$  absolut konvergent.

2. Wenn  $|x-a| > \varrho$ , so ist  $\sum a_n(x-a)^n$  divergent.

Zu 1. Sei  $|x-a| < \varrho$ .

Dann existiert (nach Definition des Supremums) ein  $r' \in \mathbb{R}$ , so daß  $|x-a| < r' \leq \varrho$  und  $r' \in M$ . Nach Definition von  $M$  existiert ein  $x' \in \mathbb{C}$ , so daß  $|x'-a| = r'$  und  $\sum a_n(x'-a)^n$  konvergiert.

Wegen  $|x-a| < r' = |x'-a|$  ist dann (nach Satz 4.19(1))  $\sum a_n(x-a)^n$  absolut konvergent.

Zu 2. Sei  $|x-a| > \varrho$ . Wäre  $\sum a_n(x-a)^n$  konvergent, so wäre  $r = |x-a| \in M$  und  $r > \varrho$ , folglich wäre  $\varrho$  nicht  $\sup M$ .  $\nexists!$   $\square$

**Bemerkung.** Die offene Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$  mit dem Mittelpunkt  $a$  und dem Radius  $\varrho$  (bzw. das offene Intervall in  $\mathbb{R}$  mit dem Mittelpunkt  $a$  und der Länge  $2\varrho$ ) heißt *Konvergenzgebiet* oder *Konvergenzkreis* (bzw. *Konvergenzintervall*) und  $a$  heißt *Mittelpunkt der Potenzreihe*  $\sum a_n(x-a)^n$ .

4/4/12

Innerhalb dieser offenen Kreisscheibe (bzw. des offenen Intervalls) konvergiert die Potenzreihe absolut, außerhalb divergiert sie; auf dem Rande kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen (man betrachte das Beispiel  $\sum \frac{x^n}{n}$  für  $x = \pm 1$ ).

**Satz 4.21** Es sei  $\sum a_n(x-a)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\varrho$ , und es sei  $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Dann gilt:

4/4/13

(1) Wenn  $0 < l < \infty$ , so  $\varrho = \frac{1}{l}$ .

(2) Wenn  $l = 0$ , so  $\varrho = \infty$ .

(3) Wenn  $l = \infty$ , so  $\varrho = 0$ .

**Beweis.** Übungsaufgabe!  $\square$

4/4/14

**Bemerkung.** Da einer der drei Fälle immer auftritt, kann man auf diese Weise den Konvergenzradius bestimmen. Zur Übung untersuche man noch einmal die letzten Beispiele 1. – 4. Existieren  $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$  bzw.  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  oder haben sie den uneigentlichen Grenzwert  $\infty$ , dann ist  $l = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$  bzw.  $l = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  (in Satz 4.21). Dies kann bei der Bestimmung des Konvergenzradius genutzt werden. 4/4/15