

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Definition. (*Konvergenzradius*)

4/4/5

Es sei ϱ eine nicht-negative reelle Zahl oder $\varrho = \infty$.

ϱ heißt *Konvergenzradius* von $\sum a_n(x-a)^n$

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes x gilt: Wenn $|x-a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent, und wenn $|x-a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.

(Hierbei soll immer gelten: $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$ bzw. $= \mathbb{C}$ und $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$.)

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Satz 4.23 (*Produkt von Potenzreihen*)

4/5/2

Es seien $\sum a_n(x-a)^n$ und $\sum b_n(x-a)^n$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien

ϱ_1 bzw. ϱ_2 , und es sei $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ ($= \sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu}$). Dann gilt:

(1) Die Potenzreihe $\sum c_n(x-a)^n$ hat einen Konvergenzradius $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

(2) Für $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ ist

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$