

# Kapitel 1

## Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

### Induktionsaxiom:

Es sei  $E$  eine Eigenschaft für natürliche Zahlen  $n$ . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage  $\forall m E(m)$  zu beweisen, genügt es:

1.  $E(0)$  zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2.  $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$  nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  und zeigt:

$$\text{Wenn } E(n), \text{ so } E(n+1).$$

$E(n)$  heißt *Induktionsvoraussetzung*,  $E(n+1)$  *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a):  $E(n)$  ist falsch.

Dann ist die Implikation  $E(n) \rightarrow E(n+1)$  aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b):  $E(n)$  ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von  $E(n+1)$  zu zeigen.

**Achtung:** Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges  $n$  wird vorausgesetzt, daß  $E(n)$  schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.5 Rechnen mit Potenzreihen

**Satz 4.25** (*Identitätssatz für Potenzreihen*)

4/5/6

Voraussetzungen:

- (1) Es seien  $\sum a_n(x-a)^n$  und  $\sum b_n(x-a)^n$  Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$  und  $\varrho_1, \varrho_2 > 0$ .
- (2)  $(x_\nu)$  sei eine Folge mit  $x_\nu \neq a$ ,  $\lim x_\nu = a$  und  $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$ .
- (3) Für jedes  $\nu \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_\nu - a)^n$ .

*Behauptung:* Für jedes  $n$  ist  $a_n = b_n$ .

(D.h., stimmen zwei Potenzreihen in unendlich vielen Punkten  $x_\nu$  überein und ist der Mittelpunkt  $a$  der Potenzreihen wenigstens ein Häufungspunkt dieser Menge, dann stimmen die Reihen schon koeffizientenweise überein, sie sind also identisch.)

**Beweis.**

4/5/7/1

Zum Beweis des Satzes benötigen wir zunächst einen Hilfssatz.

**Lemma.** Es sei  $\sum c_n(x-a)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\varrho > 0$ , und sei  $(x_\nu)$  eine Folge mit  $x_\nu \neq a$ ,  $|x_\nu - a| < \varrho$  und  $\lim x_\nu = a$ .

4/5/7/2

Dann ist  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$ .

Wir setzen nun den Beweis von Satz 4.25 fort.

4/5/7/4

Es sei  $c_n = a_n - b_n$ .

g.z.z.:  $c_n = 0$  für jedes  $n$ .

Für alle  $x_\nu$  mit  $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$  gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_\nu - a)^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_\nu - a)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot (x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n. \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt induktiv, daß  $c_n = 0$  für alle  $n$ .

1.  $n = 0$ .

Es ist  $0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n \implies 0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$ .

2. Es gelte schon  $c_0 = \dots = c_k = 0$ .

3. Behauptung:  $c_{k+1} = 0$ .

Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1}(x_\nu - a)^{n+k+1} \\ &= (x_\nu - a)^{k+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1}(x_\nu - a)^n. \end{aligned}$$

Aus  $x_\nu - a \neq 0$  folgt

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1} (x_{\nu} - a)^n.$$

Analog wie für  $n = 0$  gilt hier auch  $c_{0+k+1} = c_{k+1} = 0$ .  $\square$