

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.10 (*Eigenschaften konvergenter Folgen*)

3/1/43

Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen und c, d seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.
- (2) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (3) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
- (4) Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergent und

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$
- (4') Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent
und
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$
- (5) $(|a_n|)$ ist konvergent und $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.
- (6) Ist $a_n \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq \lim b_n$.
Ist insbesondere $a_n \leq d$ bzw. $d \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq d$
bzw. $d \leq \lim b_n$.

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Konvergenz von Reihen*)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Definition. (*unbedingte Konvergenz*)

4/2/8

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion (oder auch *Permutation* von \mathbb{N}).

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ durch *Umordnung* aus $\sum a_n$ entstanden.

$\sum a_n$ heißt *unbedingt konvergent*

$\stackrel{=}{\text{Df}}$ Jede durch Umordnung aus $\sum a_n$ entstandene Reihe ist konvergent.

Übungsaufgaben

12. Unter Benutzung von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ ist nachzuweisen, daß für folgende

4/6/12

Reihen, die aus der oben angegebenen Reihe durch Umordnung ihrer Glieder entstehen, gilt:

(a) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2.$

(b) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{2} \ln 2.$

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Definition. (*natürlicher Logarithmus*)

5/3/27

Die Umkehrfunktion von e^x heißt *natürlicher Logarithmus*.

Bez.: $\ln(x)$ oder $\ln x$