

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.3 Komplexe Zahlen

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{\text{Def}}{=} (a + c, b + d) \quad (\text{Addition von Elementen aus } \mathbb{R}^2),$$

4/3/1

$$c \cdot (a, b) \stackrel{\text{Def}}{=} (ca, cb) \quad (\text{Multiplikation mit reellen Zahlen}).$$

Zur geometrischen Veranschaulichung der komplexen Zahlen betrachten wir in \mathbb{R}^2 die kanonische Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ und erhalten so ein rechtwinkliges Koordinatensystem für \mathbb{R}^2 , mit dessen Hilfe sich die Elemente aus \mathbb{R}^2 als Punkte in der Ebene darstellen lassen (*Gaußsche Zahlenebene*).

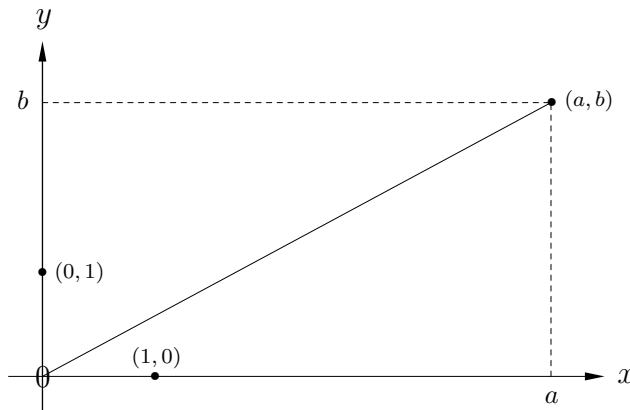


Abb. 4.1 Gaußsche Zahlenebene zur Darstellung der komplexen Zahlen

Jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich eindeutig als Linearkombination der Basis darstellen. Die folgenden Teilmengen $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ bilden wichtige eindimensionale Teilräume, die mit den entsprechenden Koordinatenachsen identifiziert werden können.

Bemerkung. Man kann mit komplexen Zahlen im Prinzip rechnen wie mit reellen Zahlen, allerdings ist in \mathbb{C} keine Ordnung definiert. 4/3/5

Wir haben uns schon überlegt, daß $\{(1, 0), (0, 1)\}$ eine Basis für den Vektorraum \mathbb{R}^2 bildet. Der Teilraum $\{x \cdot (1, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ von \mathbb{R}^2 ist offenbar isomorph mit \mathbb{R} (als 1-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R}). Daher identifizieren wir in Zukunft $(1, 0)$ mit 1. Für $(0, 1)$ schreibt man auch i (nicht zu verwechseln mit natürlichen Zahlen i), so daß durch $\{1, i\}$ eine Basis für \mathbb{R}^2 gegeben ist.

Mit dieser Vereinbarung gilt

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

Für $a \cdot 1$ bzw. für $b \cdot i$ schreiben wir kurz a bzw. ib . Damit erhält man eine geeignete Darstellung für komplexe Zahlen:

$$(a, b) = a + ib, \quad (0, 0) = 0 + i0 := 0.$$

Bez.: In $z = x + iy$ heißt x *Realteil* ($:= \text{Re}(z)$) und y *Imaginärteil* ($:= \text{Im}(z)$) von z .

Definition. (*Betrag für komplexe Zahlen*)

4/3/7

Es sei $z = x + iy$.

$$|z| \stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Bez.: $|z|$ heißt *Betrag* von z und
 $|z_1 - z_2|$ heißt *Abstand* zwischen z_1 und z_2 .

Übungsaufgaben

17. Wo liegen die Zahlen z in der Gaußschen Zahlenebene mit:

4/6/17

- (a) $|z + 3| \leq 2$, (b) $\operatorname{Re}(z) \geq 1$,
(c) $\left| \frac{z-1}{z-2} \right| = 1$, (d) $\operatorname{Re}(z^2) = a$, (a reell).