

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Definition. (*Cauchyprodukt*)

4/2/16

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist das *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$
 $\stackrel{\text{Df}}{=} c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}.$

Beispiel.

4/2/18

Das Cauchyprodukt von absolut konvergenten Reihen ist wieder absolut konvergent.

Es sei $|a| < 1$. Dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ absolut konvergent und $\sum a^i = \frac{1}{1-a}$.

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a^i}_{=\frac{1}{1-a}} \right) \cdot \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a^j}_{=\frac{1}{1-a}} \right) = \frac{1}{(1-a)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \underbrace{a^i a^j}_{a^n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \left(\underbrace{\sum_{i+j=n} 1}_{=n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n. \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Offenbar ist $|n \cdot a^n| \leq |(n+1) \cdot a^n|$. Folglich ist $\sum (n+1)|a|^n$ eine konvergente Majorante von $\sum n|a|^n$. Dann ist $\sum n \cdot a^n$ absolut konvergent, und damit gilt

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n}_{=\frac{1}{(1-a)^2}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a^n}_{=\frac{1}{1-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a^n.$$

Folglich ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a^n = \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} = \frac{1 - (1-a)}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Auf diese Weise erhält man neue Beispiele für absolut konvergente Reihen.

Wir befassen uns jetzt noch kurz mit sogenannten *Doppelreihen*. Dazu sei

4/2/19

$$(a_{mn}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

eine „unendliche Matrix“. Eine Matrix dieser Art nennen wir auch *Doppelfolge*. Die *Doppelfolge* (a_{mn}) *konvergiert* gegen a , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für alle $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_{mn} - a| < \varepsilon$. **Bez.:** $\lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn} = a$

Es sei jetzt

$$S_{mn} := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} = (a_{00} + \dots + a_{0n}) + (a_{10} + \dots + a_{1n}) + \dots + (a_{m0} + \dots + a_{mn}).$$

Dann heißt (analog wie bei der Definition von Reihen) die Doppelfolge (S_{mn}) auch *Doppelreihe*.

$$\mathbf{Bez.}: (S_{mn}) := \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$$

Die *Doppelreihe konvergiert* gegen a , wenn (S_{mn}) gegen a konvergiert.

$$\mathbf{Bez.}: \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = a$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob man den Limes $\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn}$ (falls er existiert) auch so berechnen kann, indem man zunächst die Zeilensummen $b_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ bildet und anschließend die unendliche Summe der b_i betrachtet (falls diese Reihen konvergieren; eine entsprechende Frage könnte auch für die Spaltensummen gestellt werden). Unter gewissen Voraussetzungen kann der Limes tatsächlich so bestimmt werden. Aufschluß darüber gibt der folgende Satz.

Satz 4.15 (*Großer Umordnungssatz*)

4/2/20

Es sei $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ eine Doppelreihe, $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Bijektion, und für $\varphi(\nu) = (i, j)$

sei $b_\nu := a_{ij}$. Weiterhin sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ absolut konvergent und $\sum b_\nu = b$. Dann gilt:

(1) Jede Zeilenreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} := Z_i$ konvergiert absolut.

(2) Jede Spaltenreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} := S_j$ konvergiert absolut.

(3) Die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} S_j$ konvergieren absolut, und es ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b.$$

Beweis. Sei $|b_\nu| = \beta_\nu$. Nach Voraussetzung konvergiert $\sum \beta_\nu$; es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu = \beta$. 4/2/21

Wegen $\beta_\nu \geq 0$ ist die Summe je endlich vieler $\beta_{\nu_1}, \dots, \beta_{\nu_k}$ stets $\leq \beta$. Damit erhält man

(1). $\sum_{j=0}^n \underbrace{|a_{ij}|}_{=\beta_\nu} \leq \beta$ für alle n . Folglich ist $Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent.

(2). Weiterhin ist $\sum_{i=0}^m |a_{ij}| \leq \beta$ für alle m . Damit ist auch $S_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent.

(3). Es ist auch $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n |a_{ij}| \leq \beta$ für alle m, n .

Nach Behauptung (1) existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| := \alpha_i$. Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n |a_{ij}|}_{\leq \beta} = \sum_{i=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| = \sum_{i=0}^m \alpha_i \leq \beta.$$

Weiterhin ist

$$|Z_i| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=0}^n a_{ij} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| = \alpha_i.$$

Also gilt stets

$$\sum_{i=0}^m |Z_i| \leq \sum_{i=0}^m \alpha_i \leq \beta.$$

Folglich ist $\sum Z_i$ absolut konvergent.

Analog zeigt man die absolute Konvergenz von $\sum S_j$.

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach Voraussetzung bzw. nach den obigen Ausführungen natürliche Zahlen n_1, n_2 , so daß für alle $n \geq n_1$ und alle $k \geq 0$ gilt:

$$|b_1 + \dots + b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und}$$

$$\beta_{n_2+1} + \dots + \beta_{n_2+k} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\star)$$

Sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. In der Aufzählung $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n_0)$ kommen nur endlich viele Paare $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vor. Folglich existiert ein m_0 , so daß $\varphi(0), \dots, \varphi(n_0)$ schon in der Menge $\{(i, j) : i \leq m_0, j \leq m_0\}$ auftreten.

Wählt man $m, n \geq m_0$, dann ist

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} - b \right| = |b_1 + \cdots + b_{n_0} - b + r|,$$

wobei r eine endliche Summe ist, die aus gewissen Gliedern $a_{ij} := b_\nu$ besteht, deren Indizes ν größer als n_0 sind.

Wegen (\star) folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung $|r| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also erhält man für alle $m, n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} - b \right| \leq |b_1 + \cdots + b_{n_0} - b| + |r| < \varepsilon. \quad (\star\star)$$

Für $n \rightarrow \infty$ in $(\star\star)$ erhält man

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} - b \right| = \left| \sum_{i=0}^m Z_i - b \right| \leq \varepsilon.$$

(Die Konvergenz der inneren Reihe ist schon nachgewiesen.)

Für $m \rightarrow \infty$ entsteht

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} Z_i - b \right| \leq \varepsilon \implies \sum_{i=0}^{\infty} Z_i = b.$$

Wegen $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}$ erhält man aus $(\star\star)$ analog

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} S_j - b \right| \leq \varepsilon \implies \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b. \quad \square$$

Korollar. Es sei $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ eine Doppelreihe, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Bijektion, und für 4/2/22

$\varphi(\nu) = (i, j)$ sei $b_\nu := a_{ij}$. Weiterhin sei jede Zeilenreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent,

$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| := \alpha_i$, und die Reihe $\sum \alpha_i$ sei ebenfalls konvergent. Dann gilt:

(1) $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ ist absolut konvergent.

(2) Mit $b := \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ gelten auch die Behauptungen (2)–(4) aus dem vorhergehenden Satz 4.15.

Beweis. Es sei $\sum_{\nu=0}^n |b_\nu|$ eine Partialsumme von $\sum b_\nu$. Dann gibt es eine Zahl k , 4/2/23

so daß alle Paare $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ in der Menge $\{(i, j) : i \leq k, j \leq k\}$ vorkommen. Folglich ist

$$\sum_{\nu=0}^n |b_\nu| \leq \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k |a_{ij}| \leq \sum_{i=0}^k \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}|}_{=\alpha_i} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i.$$

Dann ist die (monoton wachsende) Folge der Partialsummen von $\sum |b_\nu|$ nach oben beschränkt und folglich absolut konvergent. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.15 erfüllt und das Korollar bewiesen. \square

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Übungsaufgaben

19. Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ die Cauchysche Produktreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ und

4/6/19

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a^n \text{ mit } |a| < 1.$$

(a) Man zeige: $c_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot a^n$.

(b) Welchen Grenzwert hat P ?