

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.** (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei  $(a_n)$  eine Folge von reellen Zahlen.

(1)  $(a_n)$  ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $a_n \leq c$  (bzw.  $c \leq a_n$ ) für jedes  $n$ .

(2)  $(a_n)$  ist *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nach oben und nach unten beschränkt.

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Definition.** (*Konvergenz von Reihen*)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  konvergiert (gegen  $a$ )  $\overline{\text{Df}}$   $(S_n)$  konvergiert (gegen  $a$ ).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

$a$  heißt dann *Wert* oder *Limes* der Reihe.

**Satz 4.3** *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

4/1/16

**Satz 4.4** *Es seien  $\sum a_i$ ,  $\sum b_i$  konvergent und  $a, b \in \mathbb{R}$ .*

4/1/19

*Dann ist  $\sum (a \cdot a_i + b \cdot b_i)$  konvergent und  $\sum (a \cdot a_i + b \cdot b_i) = a \cdot \sum a_i + b \cdot \sum b_i$ .*

**Satz 4.8** (*Majorantenkriterium*)

4/1/32

*Es seien  $\sum a_i$ ,  $\sum b_i$  Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei  $\sum b_i$  eine Majorante von  $\sum a_i$ . Dann gilt:*

(1) *Ist  $\sum b_i$  konvergent, so ist auch  $\sum a_i$  konvergent.*

(2) *Ist  $\sum a_i$  divergent, so ist auch  $\sum b_i$  divergent.*

4. Wir betrachten  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

4/1/44

Die Konvergenz dieser Reihe kann man weder mit dem Wurzel- noch mit dem Quotientenkriterium nachweisen (bitte ausprobieren!). Für eine geeignete konvergente Majorante könnte man das Majorantenkriterium heranziehen.

Es ist  $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ , und die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  ist konvergent. Denn

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \implies$$

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Folglich ist  $S_k \rightarrow 1$ , und somit ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  eine konvergente Majorante von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Aus  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$  erhält man die Behauptung.

## Übungsaufgaben

6. Es sei  $(a_n)$  eine beschränkte Folge reeller Zahlen.

4/6/6

Beweisen Sie, daß  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}$  konvergiert.