

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

Induktionsaxiom:

Es sei E eine Eigenschaft für natürliche Zahlen n . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage $\forall m E(m)$ zu beweisen, genügt es:

1. $E(0)$ zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2. $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$ nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und zeigt:

$$\text{Wenn } E(n), \text{ so } E(n+1).$$

$E(n)$ heißt *Induktionsvoraussetzung*, $E(n+1)$ *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a): $E(n)$ ist falsch.

Dann ist die Implikation $E(n) \rightarrow E(n+1)$ aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b): $E(n)$ ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von $E(n+1)$ zu zeigen.

Achtung: Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges n wird vorausgesetzt, daß $E(n)$ schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

IV. \mathbb{R} genügt dem Intervallschachtelungsaxiom:

2/1/6

Es sei $([a_n, b_n])_{n=0,1,2,\dots}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in \mathbb{R} , so daß für jede natürliche Zahl n gilt: $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$, für jede natürliche Zahl n .

Anschauliche Deutung des Axioms: Wie die Intervalle auch beschaffen sind, sie können sich nicht auf eine „Lücke zusammenziehen“; sie schachteln stets wenigstens eine reelle Zahl ein.

I – IV können als Axiome für die reellen Zahlen aufgefaßt werden. Nur diese Eigenschaften von reellen Zahlen werden bei späteren Beweisen wirklich benutzt.

Definiert man die reellen Zahlen (mit einer der bekannten Methoden) aus der Menge der rationalen Zahlen, dann werden die Eigenschaften I – IV natürlich beweisbare Sätze.

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*monoton wachsend bzw. monoton fallend*)

3/1/31

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

(2) (a_n) ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*)

$\overline{\overline{\text{Df}}}$ Für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$).

Satz 3.8 *Eine monotone Folge ist konvergent gdw sie beschränkt ist.*

3/1/33

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\overline{\overline{\text{Df}}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Satz 5.3 (*Folgenstetigkeit*)

5/2/14

Es sei $a \in D(f)$. Dann gilt:

f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, so $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Satz 5.6 (*Zwischenwertsatz oder Nullstellensatz von Bolzano*)

5/2/21

Ist f in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$ (d.h., $f(a) \cdot f(b) < 0$), dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $f(c) = 0$.

Beweis. Es sei o.B.d.A. $f(a) < 0 < f(b)$ (sonst wird $-f(a) < 0 < -f(b)$ betrachtet).

5/2/22

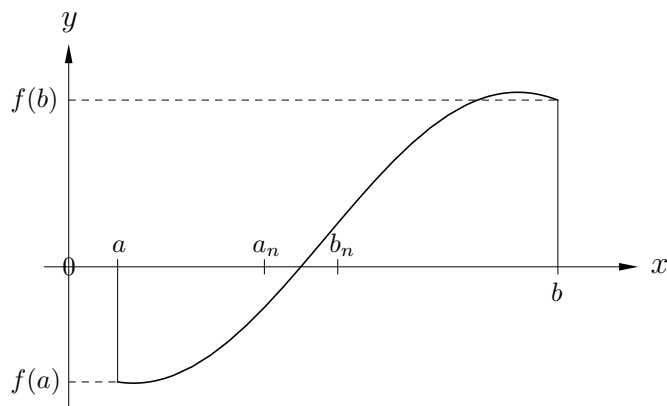


Abb. 5.15 Ist c_{n+1} der Mittelpunkt des Intervalls $[a_n, b_n]$, dann wird entsprechend der Bedingung $f(c_{n+1}) < 0$ bzw. $f(c_{n+1}) \geq 0$ das linke bzw. das rechte Teilintervall als $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ gewählt.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, so daß

$$f(a_n) < 0 \leq f(b_n) \quad \text{und} \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0).$$

Sei $a_0 := a$, $b_0 := b \implies f(a) < 0 \leq f(b)$.

Für n sei $[a_n, b_n]$ schon definiert (mit den geforderten Eigenschaften).

Sei $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$; dann definieren wir

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n, \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } f(c_{n+1}) \geq 0 \quad \text{und} \\ a_{n+1} &= c_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{falls } f(c_{n+1}) < 0. \end{aligned}$$

Offenbar ist (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt und (b_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Folglich existieren $\lim a_n$ und $\lim b_n$, und wegen $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ ist $\lim a_n = \lim b_n$.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom existiert ein c mit $a_n \leq c \leq b_n$ für alle n .
 $\implies \lim a_n = c = \lim b_n$.

Nach Voraussetzung ist $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$ für alle n . Da f in c stetig ist, gilt:

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c)$$

Daraus folgt also $f(c) = 0$. \square