

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.1 Operationen für Funktionen

**Definition.**  $f$  ist eine *reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen*

5/1/7

$\overline{\text{Df}}$   $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und für jedes  $a \in \mathbb{R}$  existiert ein  $b \in \mathbb{R}$ , so daß  $(a, b) \in f$ .

**Bez.:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

#### 5.2 Stetigkeit

**Definition.** (*Stetigkeit*)

5/2/1

$f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$   $a \in D(f)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  gilt: Wenn  $|x - a| < \delta$ , so  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

(d.h., für jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $f(a)$  gibt es eine  $\delta$ -Umgebung von  $a$ , so daß  $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$ ).

**Definition.** (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .

(1)  $f$  ist *stetig in*  $M$

$\overline{\text{Df}}$   $f$  ist in jedem Punkt  $a \in M$  stetig.

(2)  $f$  ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$   $f$  ist im gesamten Definitionsbereich  $D(f)$  stetig.

#### Beispiele.

1.  $f(x) = c$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$ . (vgl. Abb. 5.9)

5/2/4/1

Sei  $a \in \mathbb{R}$  beliebig und  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen  $\delta = \varepsilon$ . Dann gilt für alle  $x$  mit  $|x - a| < \delta$ :  $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ .

Konstante Funktionen sind also stetig.

2.  $f(x) = x$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . (vgl. Abb. 5.10)

5/2/4/2

Sei  $a \in \mathbb{R}$  beliebig und  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen wieder  $\delta = \varepsilon$ . Dann gilt für alle  $x$  mit  $|x - a| < \delta$ :  $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$ .

Folglich ist auch die Identitätsfunktion stetig.

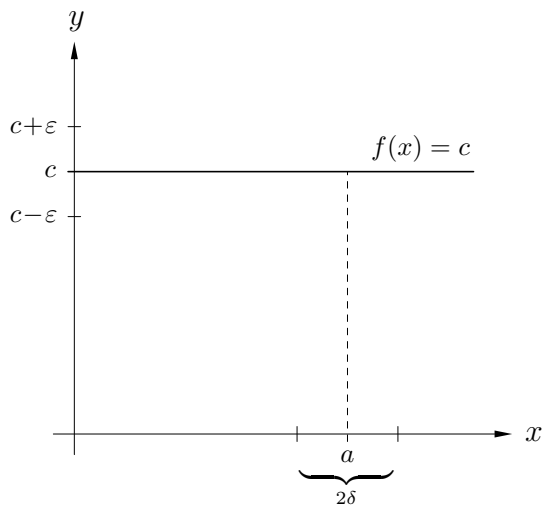


Abb. 5.9 – Konstante Funktion

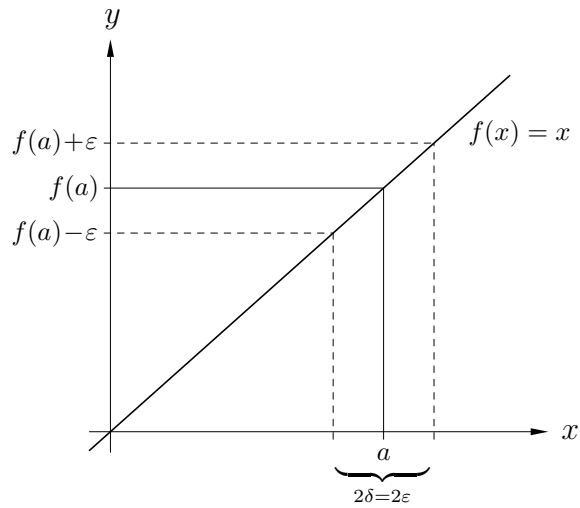


Abb. 5.10 – Identitätsfunktion