

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. f ist eine *reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen*
 $\overline{\text{Df}}$ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $b \in \mathbb{R}$, so daß $(a, b) \in f$.

5/1/7

Bez.: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Beispiele.

2. $f(x) = x$, $D(f) = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. (vgl. Abb. 5.10)

5/2/4/2

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir wählen wieder $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

Folglich ist auch die Identitätsfunktion stetig.

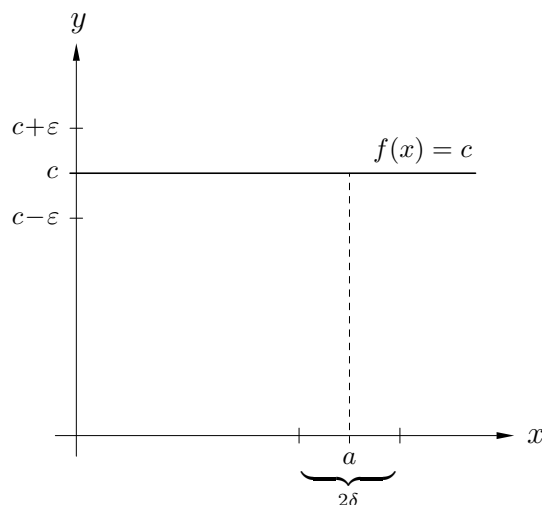


Abb. 5.9 – Konstante Funktion

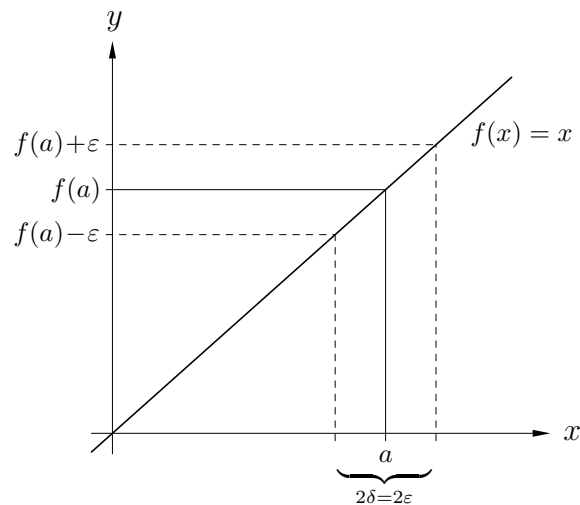


Abb. 5.10 – Identitätsfunktion