

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

(2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

5.2 Stetigkeit

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Definition. (*Grenzwert bei Funktionen*)

5/2/6

Es sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ (a muß nicht selbst zu $D(f)$ gehören).

f besitzt an der Stelle a den *Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$

Definition. (*uneigentlicher Grenzwert*)

5/2/7

Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$.

f hat an der Stelle a den *uneigentlichen Grenzwert* ∞ (bzw. $-\infty$)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $c \in \mathbb{R}$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $f(x) > c$ (bzw. $f(x) < c$).

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$)

Definition. (*Grenzwert im Unendlichen*)

5/2/9

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $D(f) = [a, \infty)$ (bzw. $D(f) = (-\infty, a]$).

f besitzt für $x \rightarrow \infty$ (bzw. für $x \rightarrow -\infty$) den *Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $x > b$ (bzw. $x < b$), so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$)

5.3 Elementare Funktionen

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $e^x \stackrel{\text{Df}}{=} \exp(x)$.

5/3/22

Definition. (*natürlicher Logarithmus*)

5/3/27

Die Umkehrfunktion von e^x heißt *natürlicher Logarithmus*.

Bez.: $\ln(x)$ oder $\ln x$

Definition. (*Exponentialfunktion zur Basis a*)

5/3/32

Sei $a > 0$. $a^x \stackrel{\text{Df}}{=} e^{x \cdot \ln a}$ (*Exponentialfunktion zur Basis a*).

Satz 5.14 Es seien $a, b > 0$. Dann gilt:

5/3/34

- (1) $\ln a^x = x \cdot \ln a$,
- (2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
- (3) $(a^x)^y = a^{xy}$,
- (4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,
- (5) a^x ist stetig.
- (6) Für $0 < a < 1$ ist a^x streng monoton fallend, und für $1 < a$ ist a^x streng monoton wachsend, für $a = 1$ ist a^x konstant 1.
- (7) Für $0 < a < 1$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$, und für $a < 1$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.