

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Satz 4.23 (*Produkt von Potenzreihen*)

4/5/2

Es seien $\sum a_n(x-a)^n$ und $\sum b_n(x-a)^n$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien ϱ_1 bzw. ϱ_2 , und es sei $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ ($= \sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu}$). Dann gilt:

(1) Die Potenzreihe $\sum c_n(x-a)^n$ hat einen Konvergenzradius $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

(2) Für $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ ist

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Lemma. Es sei $\sum c_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$, und sei (x_ν) eine Folge mit $x_\nu \neq a$, $|x_\nu - a| < \varrho$ und $\lim x_\nu = a$.

4/5/7/2

Dann ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$.

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Satz 5.2 Sei $a \in D(f)$ und a ein Häufungspunkt von $D(f)$. Dann gilt:
 f ist in a stetig gdw $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

5/2/12

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.11 Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

5/3/19

- (1) $D(\exp) = \mathbb{R}$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3) $\exp(0) = 1$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$, und
für $x > 0$ ist $1 < \exp(x)$.
- (4) \exp ist streng monoton wachsend
(folglich ist \exp injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5) $\exp(1) = e$ ($e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).
- (6) Für rationale $x = \pm \frac{m}{n}$ ist $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$
(für irrationale x ist e^x bisher nicht definiert!).
- (7) \exp ist stetig.

Definition. (\cos, \sin)

5/3/45

$$\cos x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Beide Reihen konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut. Folglich sind \sin und \cos in \mathbb{R} definiert. 5/3/46

An dieser Stelle ist nicht einzusehen, daß die so eingeführten Funktionen \sin und \cos dieselben sein sollen, die man anschaulich am Einheitskreis gewinnt. Erst mit Hilfe der Differentialrechnung werden wir später nachweisen können, daß es sich tatsächlich um die gleichen Funktionen handelt.

Satz 5.16 \sin und \cos haben folgende Eigenschaften:

5/3/47

- (1) \sin und \cos sind in \mathbb{R} definiert, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.
- (2) \sin ist ungerade und \cos ist gerade.
- (3) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ ($\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$).
- (4) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ ($\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$).
- (5) $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$.
- (6) $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$.
- (7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ($\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$).
- (8) \sin und \cos sind stetig.

Beweis. (1) ist nach Definition trivial.

(2) folgt unmittelbar aus der Definition von \sin und \cos .

(3) und (4) zeigt man mit Hilfe des Cauchyprodukts der entsprechenden Reihen (vgl. Übungsaufgaben).

(5) und (6) folgen aus (3) und (4), indem man auf der linken Seite von (5) bzw. (6) jeweils x, y in der Form $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ und $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$ schreibt.

(7). Nach (1) ist $\cos 0 = 1$; folglich erhält man mit Hilfe von (4):

$$1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos x \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{=\cos x} - \sin x \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin x} = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Damit gilt auch

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \sin^2 x \leq 1,$$

und schließlich

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1.$$

(8). \sin und \cos sind durch Potenzreihen definiert, diese sind in $x = 0$ stetig (vgl. Beweis zu Satz 5.11 (7)). Also gilt:

Wenn $x \rightarrow 0$, so $\sin x \rightarrow \sin 0 = 0$ und $\cos x \rightarrow \cos 0 = 1$.

Wir beweisen jetzt die Stetigkeit von \sin an einer beliebigen Stelle $a \neq 0$.

g.z.z.: Wenn $x \rightarrow a$, so $\sin x \rightarrow \sin a$, d.h., $\sin x - \sin a \rightarrow 0$.

Es sei $x \rightarrow a$. Nach (5) gilt:

$$\sin x - \sin a = 2 \cdot \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}.$$

Wegen $x \rightarrow a \iff \frac{x-a}{2} \rightarrow 0$ erhält man

$$|\sin x - \sin a| = 2 \cdot \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \underbrace{\left| \cos \frac{x+a}{2} \right|}_{\leq 1} \leq \underbrace{\left| \sin \frac{x-a}{2} \right|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

Für \cos ergibt sich mit Hilfe von (6) die analoge Behauptung. \square