

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.3 Elementare Funktionen

**Satz 5.16**  $\sin$  und  $\cos$  haben folgende Eigenschaften:

5/3/47

- (1)  $\sin$  und  $\cos$  sind in  $\mathbb{R}$  definiert,  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ .
- (2)  $\sin$  ist ungerade und  $\cos$  ist gerade.
- (3)  $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$  ( $\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ).
- (4)  $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$  ( $\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ).
- (5)  $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$ .
- (6)  $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$ .
- (7)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  ( $\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$ ).
- (8)  $\sin$  und  $\cos$  sind stetig.

**Bemerkung.** Die Eigenschaften (3) – (6) im Satz 5.16 heißen auch *Additionstheoreme* von  $\sin$  und  $\cos$ .

5/3/49

Im folgenden wird die Zahl  $\pi$  definiert. Es genügt offensichtlich  $\frac{\pi}{2}$  festzulegen, und dies wird sich als kleinste positive Nullstelle von  $\cos$  erweisen. Dazu müssen wir zeigen, daß  $\cos$  überhaupt eine kleinste positive Nullstelle besitzt. Hierzu benötigen wir einige Lemmata.

**Lemma 1.**  $\cos 2 < 0$ .