

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.2 Stetigkeit

**Korollar** (*Zwischenwertsatz*)

5/2/23

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig,  $d \in \mathbb{R}$  beliebig und  $f(a) < d < f(b)$  oder  $f(a) > d > f(b)$ , dann existiert ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $f(c) = d$ .

### 5.3 Elementare Funktionen

**Satz 5.16**  $\sin$  und  $\cos$  haben folgende Eigenschaften:

5/3/47

- (1)  $\sin$  und  $\cos$  sind in  $\mathbb{R}$  definiert,  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ .
- (2)  $\sin$  ist ungerade und  $\cos$  ist gerade.
- (3)  $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$  ( $\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ).
- (4)  $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$  ( $\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ).
- (5)  $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x - y}{2} \cdot \cos \frac{x + y}{2}$ .
- (6)  $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x - y}{2} \cdot \sin \frac{x + y}{2}$ .
- (7)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  ( $\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$ ).
- (8)  $\sin$  und  $\cos$  sind stetig.

**Lemma 2.**  $\cos$  hat in  $[0, 2]$  eine Nullstelle.

5/3/51

**Beweis.** Es ist  $\cos 0 = 1 > 0 > \cos 2$ .

5/3/52

$\cos$  ist im gesamten Definitionsbereich stetig, also auch in  $[0, 2]$ . Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein  $c \in (0, 2)$ , so daß  $\cos c = 0$ .  $\square$