

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

**Definition.** (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge  $(f_n)$  konvergiert in  $M$  gleichmäßig gegen  $f$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  und für alle  $x \in M$  gilt:  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.2 Stetigkeit

**Definition.** (*Stetigkeit*)

5/2/1

$f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) stetig

$\overline{\text{Df}}$   $a \in D(f)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  gilt: Wenn  $|x - a| < \delta$ , so  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

(d.h., für jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $f(a)$  gibt es eine  $\delta$ -Umgebung von  $a$ , so daß  $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$ ).

### 5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Satz 5.21** (*Stetigkeit der Grenzfunktion*)

5/4/10

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine in  $M$  definierte Funktionenfolge, und alle  $f_n$  seien in  $a$  bzw. in ganz  $M$  stetig.

- (1) Konvergiert  $(f_n)$  in  $M$  gleichmäßig gegen  $f$ , dann ist  $f$  in  $a$  bzw. in  $M$  stetig.
- (2) Konvergiert  $\sum f_n$  in  $M$  gleichmäßig gegen  $f$ , dann ist  $f$  in  $a$  bzw. in  $M$  stetig.

**Beweis.** (1). Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  und für jedes  $x \in M$  gilt:

5/4/11

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen der Stetigkeit von  $f_n$  existiert ein  $\delta_n > 0$ , so daß für jedes  $x \in M$  gilt:

$$\text{Wenn } |x - a| < \delta_n, \text{ so } |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für  $|x - a| < \delta_n$  und  $n \geq n_0$  erhält man daraus:

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{:= (\star) < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{:= (\star\star) < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{:= (\star\star\star) < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

(( $\star$ ), ( $\star\star\star$ )  $< \frac{\varepsilon}{3}$  folgen aus der gleichmäßigen Konvergenz und ( $\star\star$ )  $< \frac{\varepsilon}{3}$  aus der Stetigkeit der  $f_n$ .)

(2) folgt sofort aus (1), denn mit  $f_0, \dots, f_n$  ist auch  $F_n := \sum_{i=0}^n f_i$  stetig.  $\square$