

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Bemerkung.**  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  ist doppeldeutig, es bezeichnet die Folge der Partialsummen von  $(a_n)$  und den Wert der Reihe, falls sie konvergiert. Dies wird im praktischen Umgang aber nicht zu Verwechslungen führen. 4/1/1

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.2 Stetigkeit

**Definition.** (*Stetigkeit*) 5/2/1  
 $f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) *stetig*  
 $\overline{\text{df}}$   $a \in D(f)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  gilt: Wenn  $|x - a| < \delta$ , so  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .  
 (d.h., für jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $f(a)$  gibt es eine  $\delta$ -Umgebung von  $a$ , so daß  $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$ ).

### 5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Satz 5.21** (*Stetigkeit der Grenzfunktion*) 5/4/10  
 Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine in  $M$  definierte Funktionenfolge, und alle  $f_n$  seien in  $a$  bzw. in ganz  $M$  stetig.

- (1) Konvergiert  $(f_n)$  in  $M$  gleichmäßig gegen  $f$ , dann ist  $f$  in  $a$  bzw. in  $M$  stetig.
- (2) Konvergiert  $\sum f_n$  in  $M$  gleichmäßig gegen  $f$ , dann ist  $f$  in  $a$  bzw. in  $M$  stetig.

**Korollar.** (*Reelle*) Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzintervalls stetig. 5/4/12

**Bemerkung.**

5/4/14

Aus dem letzten Satz und dem zugehörigen Korollar erhält man weiterhin:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

(Vertauschbarkeit zweier Limites bei gleichmäßig konvergenten Folgen)

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

(Vertauschbarkeit des Limes mit der unendlichen Summe bei gleichmäßig konvergenten Reihen)

- (3) Durch Potenzreihen definierte Funktionen sind im Inneren ihres Definitionsbereiches stetig.
- (4) Das Beispiel 5/4/7 zeigt, daß Funktionenreihen der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \sin(nx) + b_n \cdot \cos(nx))$$

stetige Funktionen definieren, wenn  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  absolut konvergieren. Hieraus ergeben sich interessante und wichtige Möglichkeiten für die Darstellung weiterer nicht-elementarer Funktionen. Hiermit befaßt sich die Theorie der *Fourierreihen*, die wir jedoch nicht behandeln werden (siehe Literaturangabe [4], Teil II, Seite 109 – 116 oder [1], Teil 2, Seite 118 – 173).

## Literaturhinweise

- [4] Endl, K. und W. Luh: Analysis I u. II. Eine integrierte Darstellung. Aula-Verlag, Wiesbaden. 11/1/4