

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Definition. (*Grenzwert bei Funktionen*)

5/2/6

Es sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ (a muß nicht selbst zu $D(f)$ gehören).

f besitzt an der Stelle a den *Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$

Satz 5.2 Sei $a \in D(f)$ und a ein Häufungspunkt von $D(f)$. Dann gilt:

5/2/12

f ist in a stetig gdw $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Satz 5.4 (*Stetigkeit der rationalen Operationen*)

5/2/17

Summe, Differenz, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind stetig.

Übungsaufgaben

2. Untersuchen Sie, in welchen Punkten aus \mathbb{R} die folgende Funktion f stetig bzw. nicht stetig ist:

5/5/2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 4 - x & \text{für } 3 \leq x. \end{cases}$$