

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Satz 5.18** (Cauchysches Konvergenzkriterium für die gleichmäßige Konvergenz) 5/4/3

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die alle in  $M$  definiert sind.

(1)  $(f_n)$  ist in  $M$  gleichmäßig konvergent gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert, so daß für alle  $m, n \geq n_0$  und alle  $x \in M$  gilt:  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ .

(2)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  gleichmäßig konvergent gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert,

so daß für alle  $m, n \geq n_0$  und alle  $x \in M$  gilt:  $\left| \sum_{i=0}^m f_i(x) - \sum_{i=0}^n f_i(x) \right| < \varepsilon$

( $\iff \left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \right| < \varepsilon$ , falls  $m > n$  und  $m = n + k$ ).

**Satz 5.19** (Majorantenkriterium für Funktionenreihen) 5/4/5

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die alle in  $M$  definiert sind, und es seien  $c_n$  reelle Zahlen.

Ist  $|f_n(x)| \leq c_n$  für fast alle  $n$  und alle  $x \in M$ , und ist  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergent, dann

ist  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  gleichmäßig und absolut konvergent in  $M$ .

**Satz 5.20** (Reelle) Potenzreihen konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzbereiches gleichmäßig. 5/4/8

#### Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 5

- Cauchysches Konvergenzkriterium, Majorantenkriterium für Funktionenfolgen und -reihen (Sätze 5.18, 5.19, 5.20),

5/6/12
--------