

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Definition. f ist eine *rationale Funktion* 5/3/1

$\overline{\text{Df}}$ f läßt sich in endlich vielen Schritten mit Hilfe der rationalen Operationen aus der Identitätsfunktion und den konstanten Funktionen erzeugen.

Darstellung: $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}$ 5/3/2

Definition. f ist eine *ganze rationale Funktion* oder ein *Polynom über \mathbb{R}* 5/3/3

$\overline{\text{Df}}$ f ist eine rationale Funktion, die ohne Division erzeugt werden kann.

Definition. f ist eine *entwickelte algebraische Funktion* 5/3/8

$\overline{\text{Df}}$ f läßt sich in endlich vielen Schritten mit Hilfe der rationalen Operationen und der Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{\dots}$ aus der Identitätsfunktion und den konstanten Funktionen erzeugen.

Bemerkung. Neben den entwickelten algebraischen Funktionen gibt es noch weitere algebraische Funktionen. 5/3/11

Man nennt eine Funktion f *algebraisch*, wenn f Lösung einer algebraischen Gleichung ist, d.h., f ist eine Funktion, und es gibt Polynome $p_0(x), \dots, p_n(x)$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $y = f(x)$ gilt:

$$p_n(x)y^n + \dots + p_1(x)y + p_0(x) = 0.$$

(vgl. Literaturangabe [2], Band I, Nr. 190, Begriff einer algebraischen Funktion)

Definition. f ist *transzendent* $\overline{\text{Df}}$ f ist nicht algebraisch. 5/3/15

Exponentialfunktion 5/3/17

In dem Abschnitt über Reihen haben wir schon gesehen, daß die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert (sogar absolut; zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß für $x = 0$ und $n = 0$ $x^n = 1$ gesetzt wurde).

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist also durch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ein Wert y festgelegt, d.h., durch die Reihe ist eine Funktion $f(x)$ definiert. (vgl. Abb. 5.18)

Bez.: $f(x) := \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 5/3/18

$f(x) = \exp(x)$ heißt *Exponentialfunktion*.

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $e^x \stackrel{\text{Df}}{=} \exp(x)$. 5/3/22

Definition. (*natürlicher Logarithmus*) 5/3/27

Die Umkehrfunktion von e^x heißt *natürlicher Logarithmus*.

Bez.: $\ln(x)$ oder $\ln x$

Definition. (*Exponentialfunktion zur Basis a*) 5/3/32

Sei $a > 0$. $a^x \stackrel{\text{Df}}{=} e^{x \cdot \ln a}$ (*Exponentialfunktion zur Basis a*).

Logarithmus zur Basis $a > 0, a \neq 1$ 5/3/36

a^x ist für $a > 0$ und $a \neq 1$ streng monoton, also auch injektiv. Folglich besitzt a^x eine Umkehrfunktion.

Definition. (*Logarithmus zur Basis a*) 5/3/37

Sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Die Umkehrfunktion von a^x heißt *Logarithmus zur Basis a* .

Definition. (*Potenzfunktion mit beliebigem Exponenten*) 5/3/43

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x > 0$.

$x^a \stackrel{\text{Df}}{=} e^{a \cdot \ln x}$ heißt *Potenzfunktion* (mit dem Exponenten a).

Definition. (\cos, \sin) 5/3/45

$$\cos x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Definition. (*Tangens, Cotangens*) 5/3/63

$$\tan x \stackrel{\text{Df}}{=} \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x \stackrel{\text{Df}}{=} \frac{\cos x}{\sin x}.$$

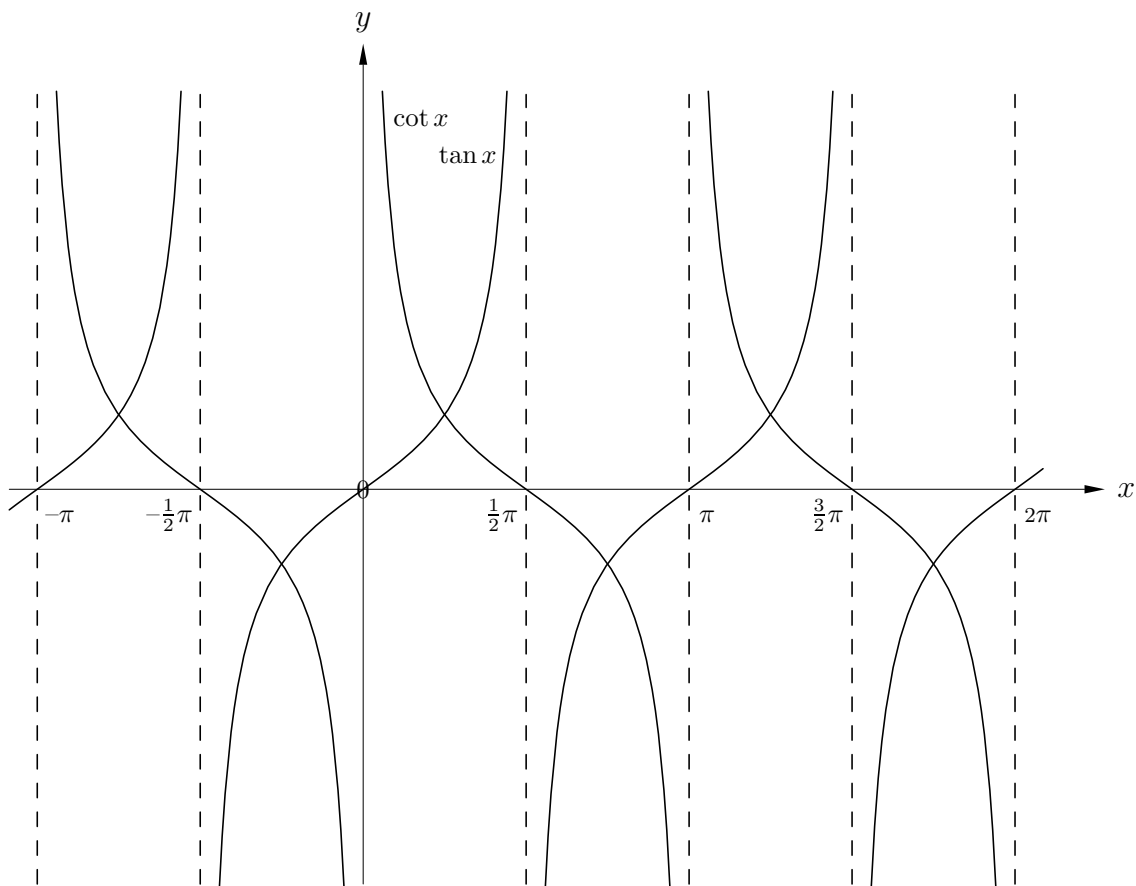


Abb. 5.23 zeigt \tan und \cot im Intervall $[-\pi, 3\pi]$

Bemerkung. Aus der Definition und den Eigenschaften von \sin und \cos erhält man 5/3/64
 sofort die wichtigsten Eigenschaften von \tan und \cot . Insbesondere gilt:

$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\}, \quad W(\tan) = \mathbb{R};$$

$$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\}, \quad W(\cot) = \mathbb{R}.$$

\tan und \cot sind als Quotienten von stetigen Funktionen wieder stetig;

\tan und \cot sind wie \sin und \cos periodisch, allerdings mit der Periode π .

Ähnlich wie \sin und \cos lassen sich auch \tan und \cot am Einheitskreis geometrisch interpretieren (vgl. Abb 5.21 und 5.24).

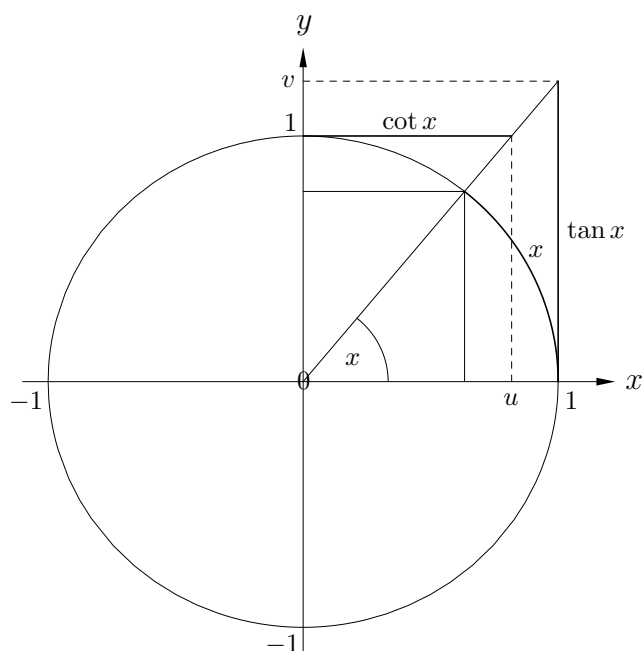


Abb. 5.24 In der Abbildung ist zu erkennen, wie am Einheitskreis die Funktionen \tan und \cot in Abhängigkeit von dem Winkel x (alle hervorgehoben durch dickere Strichstärke; x gemessen in Bogenmaß) veranschaulicht werden können. \cot bzw. \tan sind dann definiert durch: $\cot x := u$, $\tan x := v$.

Die trigonometrischen Funktionen \sin , \cos , \tan , \cot sind als periodische Funktionen **nicht** in ihren gesamten Definitionsbereichen injektiv. In den (maximalen) Teilintervallen, in denen sie jedoch injektiv sind (dort sind sie auch stetig und daher streng monoton), besitzen sie Umkehrfunktionen (die sog. *Arcus-Funktionen*; Arcus oder Arkus := Bogenmaß eines Winkels), die der Reihe nach mit \arcsin , \arccos , \arctan , arccot bezeichnet werden.

Zur Veranschaulichung der Arcus-Funktionen betrachte man zunächst die Abb. 5.21. Dort ist der Winkel x in Bogenmaß gegeben (das ist bekanntlich die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis zwischen den Punkten $(1,0)$ und (u,v) im entgegengesetzten Uhrzeigersinn). Für fixiertes x ist $\sin x$ symbolisiert durch die Strecke der Länge v zwischen den Punkten $(u,0)$ und (u,v) . Also

$$\sin x = v \implies \arcsin(\sin x) = \arcsin v = x \quad (:= \text{die zu } \sin x \text{ gehörende Bogenlänge}).$$

Das Analoge gilt für Cosinus, Tangens und Cotangens.

Abschließend werden noch die trigonometrischen Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen (in geeigneten Intervallen) dargestellt (vgl. Abb. 5.25 – 5.28). Sinus wird in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ und in $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ betrachtet, Cosinus in $[0, \pi]$ und in $[\pi, 2\pi]$. Tangens und Cotangens werden in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ bzw. in $[0, \pi]$ dargestellt.

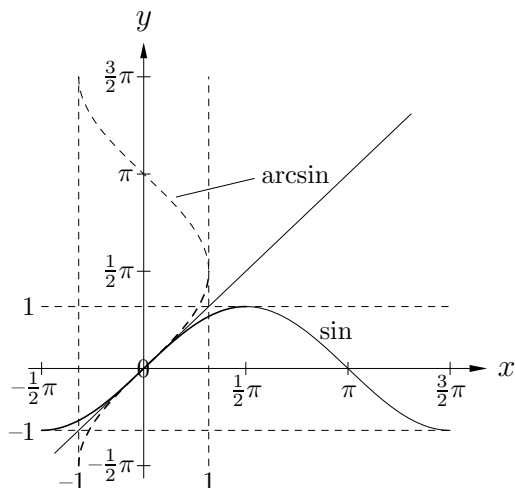


Abb. 5.25 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Sinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Sinus injektiv ist.

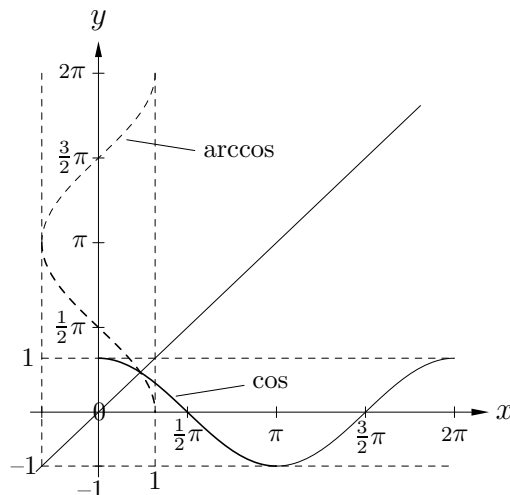


Abb. 5.26 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Cosinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Cosinus injektiv ist.

Analog wie in den vorhergehenden Abbildungen verfahren wir jetzt noch mit Tangens und Cotangens.

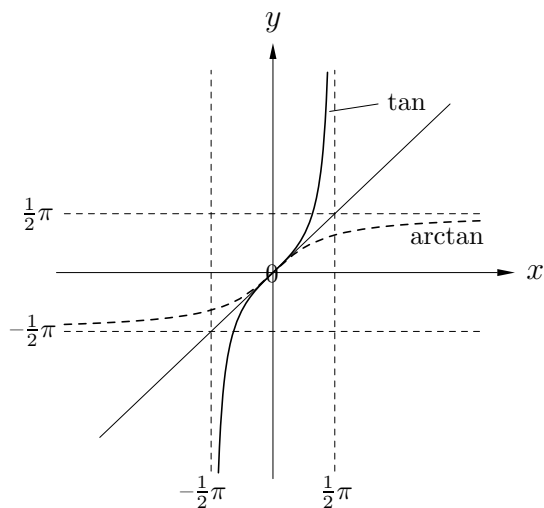


Abb. 5.27 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Tangens in dem Intervall $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

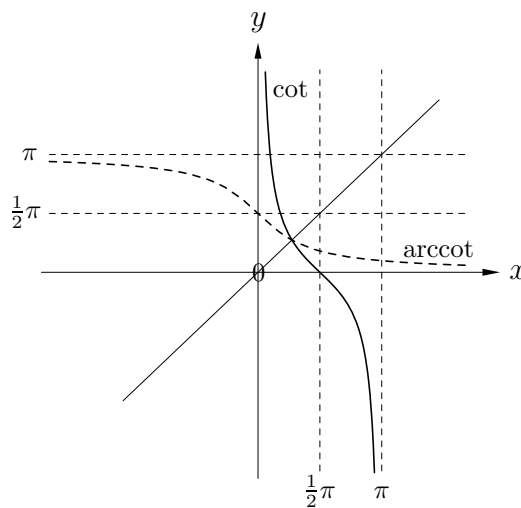


Abb. 5.28 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Cotangens in dem Intervall $(0, \pi)$.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 5

- elementare Funktionen: rationale Funktionen, ganze rationale Funktionen (Polynome), algebraische Funktionen, transzendente Funktionen (Exponentialfunktionen, Logarithmus, Potenzfunktionen, trigonometrische Funktionen, Arcus-Funktionen),

5/6/8
