

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*metrischer Raum*)

6/1/10

Es sei \mathbb{M} eine nicht-leere Menge und $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h., für $a, b \in \mathbb{M}$ ist $\varrho(a, b) \in \mathbb{R}$), so daß für alle $a, b, c \in \mathbb{M}$ gilt:

- (1) $\varrho(a, b) \geq 0$, und $\varrho(a, b) = 0 \iff a = b$.
- (2) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. (Symmetrie)
- (3) $\varrho(a, b) \leq \varrho(a, c) + \varrho(c, b)$. (Dreiecksungleichung)

Dann ist ϱ eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in \mathbb{M} , und das Paar (\mathbb{M}, ϱ) heißt *metrischer Raum*.

Definition. (*ε -Umgebung*)

6/1/12

Es sei $a \in \mathbb{M}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

$U_\varepsilon(a)$ heißt *ε -Umgebung* von a (in \mathbb{M})

$\stackrel{\text{Df}}{=} U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{M} : \varrho(x, a) < \varepsilon\}$.

Definition. (*Beschränktheit*)

6/1/18

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M ist *beschränkt* (in \mathbb{M})

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert ein } a \in \mathbb{M} \text{ und ein } \varepsilon > 0, \text{ so daß } M \subseteq U_\varepsilon(a)$

(d.h., M ist in einer Kugel – mit endlichem Radius ε – enthalten; also für jedes $x \in M$ gilt:
 $\varrho(x, a) < \varepsilon$; vgl. Abb. 6.3)