

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Definition.** (*metrischer Raum*)

6/1/10

Es sei  $\mathbb{M}$  eine nicht-leere Menge und  $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  (d.h., für  $a, b \in \mathbb{M}$  ist  $\varrho(a, b) \in \mathbb{R}$ ), so daß für alle  $a, b, c \in \mathbb{M}$  gilt:

- (1)  $\varrho(a, b) \geq 0$ , und  $\varrho(a, b) = 0 \iff a = b$ .
- (2)  $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$ . (Symmetrie)
- (3)  $\varrho(a, b) \leq \varrho(a, c) + \varrho(c, b)$ . (Dreiecksungleichung)

Dann ist  $\varrho$  eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in  $\mathbb{M}$ , und das Paar  $(\mathbb{M}, \varrho)$  heißt *metrischer Raum*.

**Definition.** (*Beschränktheit*)

6/1/18

Es sei  $M \subseteq \mathbb{M}$ .

$M$  ist *beschränkt* (in  $\mathbb{M}$ )

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{M}$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $M \subseteq U_\varepsilon(a)$

(d.h.,  $M$  ist in einer Kugel – mit endlichem Radius  $\varepsilon$  – enthalten; also für jedes  $x \in M$  gilt:  
 $\varrho(x, a) < \varepsilon$ ; vgl. Abb. 6.3)

**Definition.** (*Häufungspunkt*)

6/1/20

Es sei  $M \subseteq \mathbb{M}$  und  $a \in \mathbb{M}$ .

$a$  ist ein *Häufungspunkt* von  $M$

$\overline{\text{Df}}$  In jeder Umgebung von  $a$  liegt noch wenigstens ein von  $a$  verschiedener Punkt aus  $M$ .

**Satz 6.4** (*Satz von Bolzano-Weierstraß*)

6/1/24

Jede unendliche und beschränkte Menge von Elementen aus  $\mathbb{R}^n$  besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.