

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Definition.** ( $\varepsilon$ -Umgebung)

6/1/12

Es sei  $a \in \mathbb{M}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ .

$U_\varepsilon(a)$  heißt  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  (in  $\mathbb{M}$ )

$\stackrel{\text{Df}}{=} U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{M} : \varrho(x, a) < \varepsilon\}$ .

**Definition.** (Häufungspunkt)

6/1/20

Es sei  $M \subseteq \mathbb{M}$  und  $a \in \mathbb{M}$ .

$a$  ist ein Häufungspunkt von  $M$

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{In jeder Umgebung von } a \text{ liegt noch wenigstens ein von } a \text{ verschiedener Punkt aus } M.$

**Satz 6.5** Es sei  $M \subseteq \mathbb{M}$  und  $C(M)$  das Komplement von  $M$  bez.  $\mathbb{M}$ .

6/1/27

Dann gilt:  $M$  ist offen gdw  $C(M)$  abgeschlossen ist.

**Beweis.** ( $\longrightarrow$ ) Sei  $M$  offen und  $a$  ein Häufungspunkt von  $C(M)$ .

6/1/28

z.z.:  $a \in C(M)$ .

Annahme:  $a \notin C(M)$  ( $\implies a \in M$ ).

Da  $M$  offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $U_\varepsilon(a) \subseteq M$ . Dann enthält  $U_\varepsilon(a)$  keinen Punkt aus  $C(M)$ , folglich ist  $a$  kein Häufungspunkt von  $C(M)$ .  $\nexists!$

( $\longleftarrow$ ) Sei  $C(M)$  abgeschlossen und  $a \in M$ .

z.z.: Es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $U_\varepsilon(a) \subseteq M$ .

Annahme: Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist  $U_\varepsilon(a) \not\subseteq M$ ,

d.h., für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $x \in U_\varepsilon(a)$  mit  $x \notin M$ , also  $x \in C(M)$ . Wegen  $a \in M$  ist  $x \neq a$ . Folglich gibt es in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  ein von  $a$  verschiedenes Element aus  $C(M)$ ; somit ist  $a$  ein Häufungspunkt von  $C(M)$ . Da  $C(M)$  nach Voraussetzung abgeschlossen ist, muß  $a$  zu  $C(M)$  gehören.  $\nexists!$   $\square$