

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*metrischer Raum*)

6/1/10

Es sei \mathbb{M} eine nicht-leere Menge und $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h., für $a, b \in \mathbb{M}$ ist $\varrho(a, b) \in \mathbb{R}$), so daß für alle $a, b, c \in \mathbb{M}$ gilt:

- (1) $\varrho(a, b) \geq 0$, und $\varrho(a, b) = 0 \iff a = b$.
- (2) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. (Symmetrie)
- (3) $\varrho(a, b) \leq \varrho(a, c) + \varrho(c, b)$. (Dreiecksungleichung)

Dann ist ϱ eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in \mathbb{M} , und das Paar (\mathbb{M}, ϱ) heißt *metrischer Raum*.

Definition. (*Umgebung*)

6/1/16

Es sei $a \in \mathbb{M}$ und $U \subseteq \mathbb{M}$.

- (1) U ist eine *offene Umgebung* von a
 $\overline{\text{Df}}$ U ist offen und $a \in U$.
- (2) U ist eine *Umgebung* von a
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{M}$ mit $a \in U'$ und $U' \subseteq U$.

Bez.: $U := U(a)$

Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{M}$ und $a \in \mathbb{M}$.

6/1/32

- (1) a ist ein *innerer Punkt* von M
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Umgebung $U(a)$, die ganz zu M gehört.
- (2) a ist ein *Randpunkt* von M
 $\overline{\text{Df}}$ In jeder Umgebung von a existiert ein Punkt aus M und ein Punkt, der nicht zu M gehört.
- (3) a ist ein *isolierter Punkt* von M
 $\overline{\text{Df}}$ $a \in M$ und es gibt eine Umgebung von a , die außer a keinen weiteren Punkt aus M enthält.