

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*metrischer Raum*)

6/1/10

Es sei \mathbb{M} eine nicht-leere Menge und $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h., für $a, b \in \mathbb{M}$ ist $\varrho(a, b) \in \mathbb{R}$), so daß für alle $a, b, c \in \mathbb{M}$ gilt:

- (1) $\varrho(a, b) \geq 0$, und $\varrho(a, b) = 0 \iff a = b$.
- (2) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. (Symmetrie)
- (3) $\varrho(a, b) \leq \varrho(a, c) + \varrho(c, b)$. (Dreiecksungleichung)

Dann ist ϱ eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in \mathbb{M} , und das Paar (\mathbb{M}, ϱ) heißt *metrischer Raum*.

Definition. (*Konvergenz in metrischen Räumen*)

6/1/35

Sei (x_n) eine Folge in \mathbb{M} und $a \in \mathbb{M}$.

(x_n) konvergiert gegen a (in \mathbb{M})

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $\varrho(x_n, a) < \varepsilon$
(d.h., für fast alle n ist der Abstand zwischen x_n und a kleiner als ε , oder in jeder ε -Umgebung von a liegen fast alle Folgenglieder).

Bez.: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ oder kurz $x_n \rightarrow a$.