

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Satz 6.1 (Schwarzsche Ungleichung)

6/1/5

Für beliebige reelle Zahlen a_i, b_i gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Beweis. In der linearen Algebra definiert man das Skalarprodukt für Vektoren

6/1/6

$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n), \bar{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ wie folgt: $(\bar{a}, \bar{b}) := \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Man überlegt sich leicht, daß das so definierte Skalarprodukt folgende Eigenschaften besitzt:

$$(\bar{a}, \bar{a}) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0, \text{ und } (\bar{a}, \bar{a}) > 0, \text{ falls } \bar{a} \neq \bar{0},$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a}),$$

$$(\bar{a} + \bar{c}, \bar{b} + \bar{d}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{d}) + (\bar{c}, \bar{b}) + (\bar{c}, \bar{d}),$$

$$(r \cdot \bar{a}, \bar{b}) = r \cdot (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, r \cdot \bar{b}) \text{ für alle } r \in \mathbb{R}.$$

Für beliebige $r \in \mathbb{R}$ erhält man hieraus

$$0 \leq (r \cdot \bar{a} + \bar{b}, r \cdot \bar{a} + \bar{b}) = r^2 \cdot (\bar{a}, \bar{a}) + 2r \cdot (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{b}).$$

Für $\bar{a} = \bar{0}$ ist die Schwarzsche Ungleichung offenbar richtig.

Es sei jetzt $\bar{a} \neq \bar{0}$ und damit $(\bar{a}, \bar{a}) > 0$. Wählt man speziell $r = -\frac{(\bar{a}, \bar{b})}{(\bar{a}, \bar{a})}$, dann erhält man

$$0 \leq \frac{(\bar{a}, \bar{b})^2}{(\bar{a}, \bar{a})} - \frac{2(\bar{a}, \bar{b})^2}{(\bar{a}, \bar{a})} + (\bar{b}, \bar{b}) = -\frac{(\bar{a}, \bar{b})^2}{(\bar{a}, \bar{a})} + (\bar{b}, \bar{b}).$$

Folglich ist

$$(\bar{a}, \bar{b}) \leq (\bar{a}, \bar{a}) \cdot (\bar{b}, \bar{b}),$$

und dies ist die Schwarzsche Ungleichung in etwas veränderter Schreibweise. \square