

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Satz 5.4 (*Stetigkeit der rationalen Operationen*) 5/2/17

Summe, Differenz, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind stetig.

Beweis. Mit Hilfe von Satz 5.3 erhält man die Behauptung unmittelbar aus den Grenzwertsätzen für Folgen. 5/2/18

Wir skizzieren den Beweis für die Summe. Es sei $x_n \rightarrow a$. Dann ist

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a) + g(a) = (f + g)(a). \quad \square$$

Satz 5.5 (*Stetigkeit der Verkettung*) 5/2/19

Seien f, g Funktionen mit $W(g) \subseteq D(f)$.

Ist g in a stetig und f in $g(a)$ stetig, dann ist $f \circ g$ in a stetig.

Beweis. Nach Definition der Stetigkeit ist g in a und f in $g(a)$ definiert, folglich ist $a \in D(f \circ g)$. 5/2/20

Sei (x_n) eine Folge in $D(f \circ g)$ mit $x_n \rightarrow a$. Dann ist g in x_n definiert, und wegen $W(g) \subseteq D(f)$ ist f in $g(x_n)$ definiert.

Aus der Stetigkeit von g in a folgt: $g(x_n) \rightarrow g(a)$.

Nach Voraussetzung ist f in $g(a)$ stetig. Dann gilt für jede Folge (y_n) in $D(f)$:

$$\text{Wenn } y_n \rightarrow g(a), \text{ so } f(y_n) \rightarrow f(g(a)).$$

Speziell für $y_n = g(x_n)$ gilt dann

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) = f(y_n) \longrightarrow f(g(a)) = (f \circ g)(a).$$

Nach Satz 5.3 ist also $f \circ g$ in a stetig. □

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 6.11 *In euklidischen Räumen sind Summe, Differenz, Produkt, Quotient und die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig.* (Beim Produkt bzw. beim Quotienten werden nur solche Funktionen zugelassen, die aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R} abbilden!) 6/2/16

Beweis. Den Beweis führt man völlig analog wie für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 6/2/17

(Die obige Einschränkung für Produkte und Quotienten auf reellwertige Funktionen ist notwendig, da Produkt und Quotient von Vektoren i.a. nicht definiert sind.) □