

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a stetig

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

Beispiele (für stetige Funktionen)

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $D(f) = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) := x + y$.

6/2/4/2

Behauptung: f ist in \mathbb{R}^2 stetig.

Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|f(x, y) - f(a, b)| = |x + y - (a + b)| = |x - a + y - b| \leq |x - a| + |y - b| := (\star).$$

g.z.z.: Es gibt ein $\delta > 0$, so daß für jedes $(x, y) \in D(f)$: Wenn $|(x, y) - (a, b)| < \delta$, so $(\star) < \varepsilon$.

Es ist

$$|(x, y) - (a, b)| = |(x - a, y - b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Wählt man $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$, dann gilt

$$|(x, y) - (a, b)| < \delta$$

$$\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2 = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\implies (x - a)^2, (y - b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\implies |x - a|, |y - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $|f(x, y) - f(a, b)| \leq (\star) = |x - a| + |y - b| < \varepsilon$; damit leistet $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ das Verlangte.