

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*

$\stackrel{\text{Df}}{=} a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Wie für reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen vereinbaren wir, daß eine Funktion f in einer Menge $M \subseteq \mathbb{M}_1$ stetig ist, wenn sie in jedem Punkt der Menge stetig ist.

6/2/3

Ist z.B. $\mathbb{M}_1 = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}_2 = \mathbb{R}$ (mit dem euklidischen Abstand als Metrik) und ist $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, dann erhält man:

f ist in \bar{a} stetig $\iff \bar{a} \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in D(f)$ gilt: Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$.

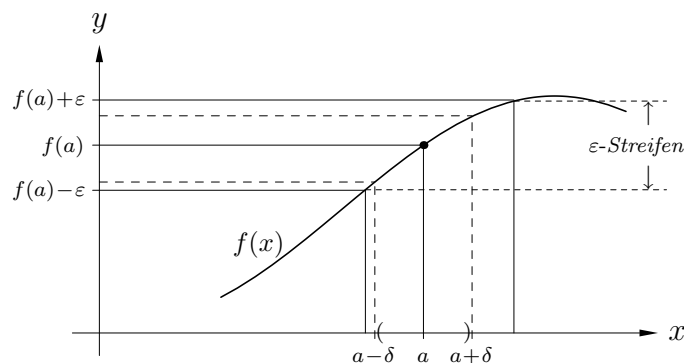


Abb. 6.8 a Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$; d.h., die Funktionswerte von f , eingeschränkt auf $U_\delta(a)$, liegen alle in dem ε -Streifen um $f(a)$.

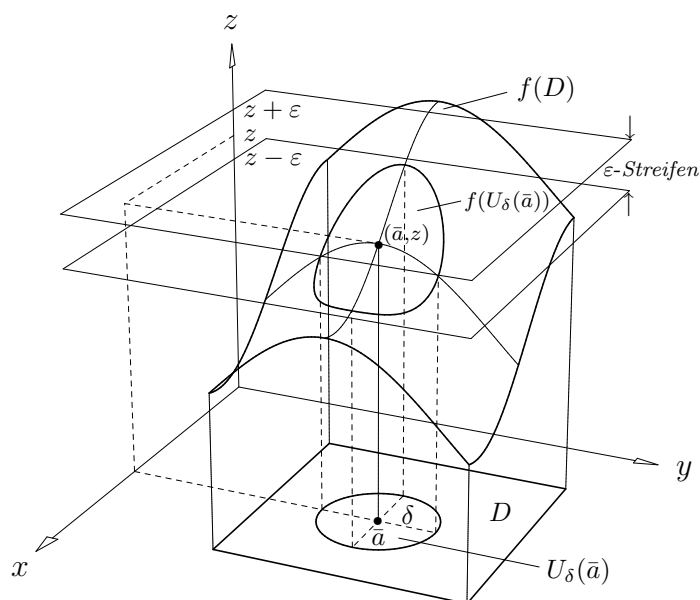


Abb. 6.8 b Ähnlich wie in der Abb. 6.6 betrachten wir eine Funktion f , die in dem Rechteckbereich D definiert ist. Weiterhin sei $\bar{a} \in D$, $f(\bar{a}) = z$ und $\varepsilon > 0$. Analog wie in der Abb. 6.8 a liegen die Funktionswerte von f , eingeschränkt auf $U_\delta(\bar{a})$, zwischen den beiden Ebenen, die parallel zur x - y -Ebene sind und durch die Punkte $(0, 0, z - \varepsilon)$ bzw. $(0, 0, z + \varepsilon)$ verlaufen.

Satz 6.8 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
 f ist in \bar{a} stetig gdw f_1, \dots, f_m in \bar{a} stetig sind.

6/2/5

(D.h., Stetigkeit bei Vektorfunktionen ist komponentenweise Stetigkeit.)

Bemerkung. Aufgrund von Satz 6.8 können Stetigkeitsuntersuchungen für Vektorfunktionen zurückgeführt werden auf Stetigkeitsuntersuchungen für reellwertige Funktionen. Analog wie bei Funktionen einer reellen Veränderlichen läßt sich die Stetigkeit auch hier mit dem Grenzwertbegriff charakterisieren.

6/2/7

Definition. (Grenzwert)

6/2/8

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$, a ein Häufungspunkt von $D(f)$ und $c \in \mathbb{M}_2$.

f besitzt in a den Grenzwert c

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), c) < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$.