

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*Häufungspunkt*)

6/1/20

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$ und $a \in \mathbb{M}$.

a ist ein *Häufungspunkt* von M

$\overline{\text{Df}}$ In jeder Umgebung von a liegt noch wenigstens ein von a verschiedener Punkt aus M .

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Grenzwert*)

6/2/8

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$, a ein Häufungspunkt von $D(f)$ und $c \in \mathbb{M}_2$.

f besitzt in a den *Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), c) < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$.

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und \bar{a} ein Häufungspunkt von $D(f)$, dann gilt:

6/2/9

f besitzt an der Stelle \bar{a} den Grenzwert $c \iff$ für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in D(f)$ mit $\bar{x} \neq \bar{a}$ gilt: Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - c| < \varepsilon$.

Für reellwertige Funktionen lassen sich völlig analog wie im eindimensionalen Fall uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$ definieren.