

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Funktionen mit mehreren Veränderlichen*)

6/2/0

f ist eine reellwertige Funktion mit n reellen Veränderlichen

$\overline{\text{Df}} \quad f \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (:= \mathbb{R}^{n+1})$ und für jedes $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ gibt es höchstens ein $b \in \mathbb{R}$,
so daß $(\bar{a}, b) \in f$ (hierbei ist $(\bar{a}, b) = (a_1, \dots, a_n, b)$).

Bez.: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(\bar{a}) = b$.

Da die Werte dieser Funktionen reelle Zahlen sind, lassen sich die rationalen Operationen hierfür völlig analog wie bei Funktionen mit einer reellen Veränderlichen definieren.

6/2/1

Eine anschauliche graphische Darstellung der Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist für die Fälle $n \geq 3$ nicht mehr möglich. Für $n = 2$ erfolgt dies im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 (vgl. Abb. 6.6). Hierbei benutzt man in der Regel x, y als unabhängige Variablen und z als abhängige Variable.

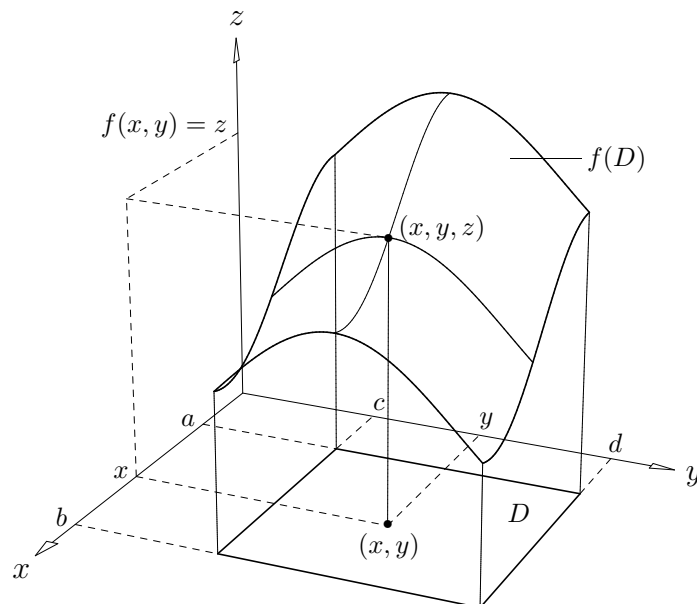


Abb. 6.6 Der Einfachheit wegen wird als Definitionsbereich von f ein Rechteck $D := [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ gewählt; $D = D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Für $f(x, y) = z$ kann man sich die Menge $\{(x, y, z) : (x, y) \in D\}$ bei einer stetigen Funktion f als „gekrümmte Fläche“ im Raum \mathbb{R}^3 vorstellen.

Die Verkettung $f \circ g$ für beliebige Funktionen $g : A \rightarrow B$ und $f : B \rightarrow C$ ist nur dann definiert, wenn $W(g) \subseteq D(f)$ (vgl. Kapitel 5, Operationen für Funktionen). Daraus ergibt sich sofort, daß sich reellwertige Funktionen nur in Spezialfällen verketteten lassen, f müßte z.B. \mathbb{R} in \mathbb{R} abbilden.

Betrachtet man Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, wobei $m, n \geq 1$ und sonst beliebig sind (solche Funktionen heißen auch *Vektorfunktionen* und für $m = n$ auch *Vektorfelder*), dann läßt sich die Verkettung wieder allgemeiner ausführen.

Die oben betrachteten Funktionen sind wichtige Hilfsmittel zur Beschreibung der objektiven Realität mit Hilfe mathematischer Begriffe. Will man etwa das Gravitationsfeld der Erde durch eine Funktion f beschreiben, dann muß die Funktion f jedem Raumpunkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$ die wirkende Schwerkraft \bar{b} in diesem Punkt zuordnen. Die Kraft ist aber auch ein Vektor (aus \mathbb{R}^3), also ist $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Ist $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, dann ist $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Wenn nun $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es reelle Zahlen y_1, \dots, y_m , so daß $g(\bar{x}) = (y_1, \dots, y_m)$. Ist zusätzlich $(y_1, \dots, y_m) \in D(f)$, dann ist auch f an der Stelle (y_1, \dots, y_m) definiert, folglich gibt es reelle Zahlen z_1, \dots, z_k mit $f(y_1, \dots, y_m) = (z_1, \dots, z_k)$, also $f(g(x_1, \dots, x_n)) = (z_1, \dots, z_k)$. Betrachtet man \bar{x} als ein n -Tupel von Variablen x_i , dann lassen sich aus

$$g(\bar{x}) = (y_1, \dots, y_m)$$

wie folgt m reellwertige Funktionen definieren:

$$g_1(\bar{x}) := y_1, \dots, g_m(\bar{x}) := y_m.$$

Setzt man diese in $f(y_1, \dots, y_m)$ ein, so entsteht

$$f(y_1, \dots, y_m) = f(g_1(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x})) = (z_1, \dots, z_k).$$

Für $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ schreiben wir auch $g := (g_1, \dots, g_m)$ und schließlich

$$(f \circ g)(\bar{x}) = f(g(\bar{x})) = f(g_1(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x})) = (z_1, \dots, z_k).$$

Bevor wir uns der Stetigkeit und weiterer wichtiger Eigenschaften von Vektorfunktionen zuwenden, betrachten wir noch einen wichtigen Spezialfall für $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, nämlich $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$, also $m = 1$. Mit solchen Funktionen lassen sich sehr elegant sogenannte *Kurven* in mehrdimensionalen Räumen darstellen.

Als Beispiel wählen wir $k = 2$ (vgl. Abb. 6.7).

In \mathbb{R}^2 sei ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $0 := (0, 0)$ gegeben. Den Kreis kann man durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ beschreiben. Löst man diese Gleichung nach y auf, so erhält man $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Entsprechend des Vorzeichens entstehen zwei reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen, die jeweils den oberen bzw. den unteren Kreisbogen beschreiben. Der gesamte Kreisbogen läßt sich aber nicht durch eine reellwertige Funktion beschreiben. Ist (x, y) der in der Abbildung dargestellte Punkt auf dem Kreis und t der zugehörige Kreisbogen, dann ist offenbar

$$x := r \cdot \cos t \quad \text{und} \quad y := r \cdot \sin t.$$

Durchläuft t das Intervall $[0, 2\pi]$, dann durchläuft

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t)) := (x, y) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$$

alle Punkte auf der gesamten Kreislinie; also das Bild

$$f([0, 2\pi]) = \{(f_1(t), f_2(t)) : t \in [0, 2\pi]\}$$

zeigt den Kreis.

(Eine solche Darstellung des Kreises bezeichnet man auch als eine *Parameterdarstellung* des Kreises, das Intervall $[0, 2\pi]$ heißt hierbei *Parameterintervall*. Wir werden uns mit diesen „Kurven“ noch genauer befassen.)

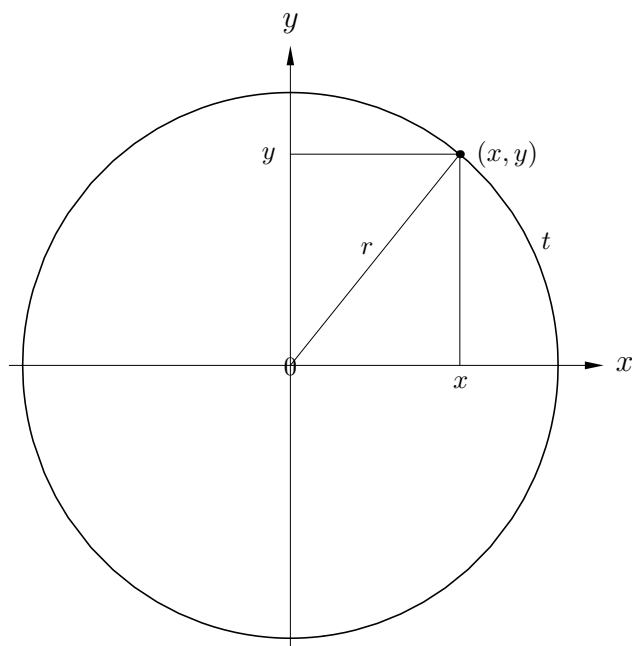


Abb. 6.7 Hier ist $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f = (f_1, f_2)$ und $f_1(t) = r \cos t = x$ und $f_2(t) = r \sin t = y$.

Achtung : In der Abbildung ist nur der Bildraum bzw. das Bild der Funktion f dargestellt. Die Funktion f selbst: $f = \{(t, f_1(t), f_2(t)) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ist eine Teilmenge des Raumes \mathbb{R}^3 . Sie läßt sich nur sehr schlecht graphisch veranschaulichen.

Bemerkung. Die wichtigsten Eigenschaften der Vektorfunktionen lassen sich aus den Eigenschaften ihrer Komponenten herleiten – diese Komponenten sind reellwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher. Daher werden wir uns vorwiegend mit reellwertigen Funktionen befassen. Um aber nicht für jeden konkreten euklidischen Raum die Definitionen (und auch Sätze) immer wieder neu formulieren (bzw. beweisen) zu müssen, hatten wir metrische Räume eingeführt. Die Ergebnisse sind dann jeweils für den entsprechenden Spezialfall zu interpretieren.

Im folgenden seien $(\mathbb{M}_1, \varrho_1)$ und $(\mathbb{M}_2, \varrho_2)$ metrische Räume, die wir kurz mit \mathbb{M}_1 bzw. mit \mathbb{M}_2 bezeichnen. (Für unsere Zwecke können wir uns darunter immer $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ vorstellen.)

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a stetig

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

Wie für reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen vereinbaren wir, daß eine Funktion f in einer Menge $M \subseteq \mathbb{M}_1$ stetig ist, wenn sie in jedem Punkt der Menge stetig ist.

6/2/3

Ist z.B. $\mathbb{M}_1 = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}_2 = \mathbb{R}$ (mit dem euklidischen Abstand als Metrik) und ist $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, dann erhält man:

f ist in \bar{a} stetig $\iff \bar{a} \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in D(f)$ gilt: Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$.

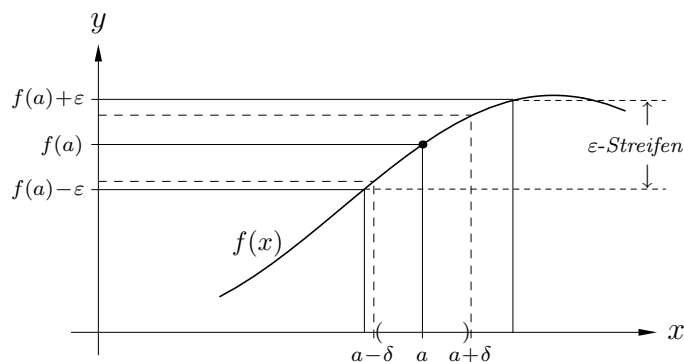


Abb. 6.8 a Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$; d.h., die Funktionswerte von f , eingeschränkt auf $U_\delta(a)$, liegen alle in dem ε -Streifen um $f(a)$.

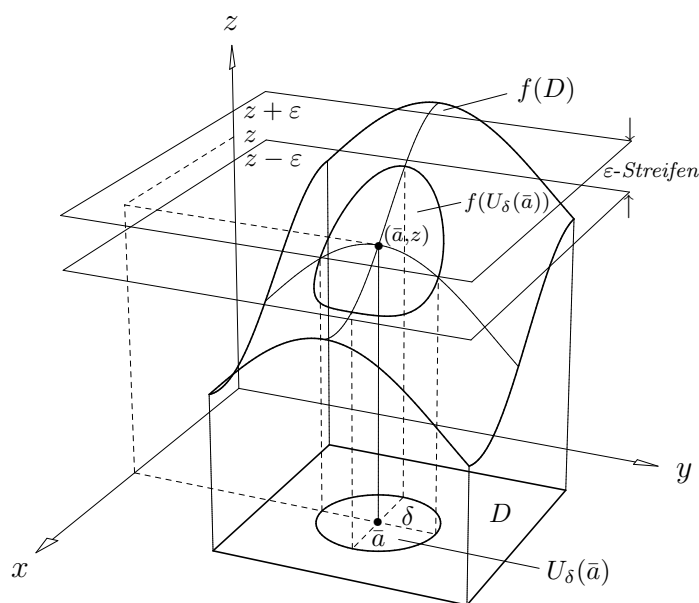


Abb. 6.8 b Ähnlich wie in der Abb. 6.6 betrachten wir eine Funktion f , die in dem Rechteckbereich D definiert ist. Weiterhin sei $\bar{a} \in D$, $f(\bar{a}) = z$ und $\varepsilon > 0$. Analog wie in der Abb. 6.8 a liegen die Funktionswerte von f , eingeschränkt auf $U_\delta(\bar{a})$, zwischen den beiden Ebenen, die parallel zur x - y -Ebene sind und durch die Punkte $(0, 0, z - \varepsilon)$ bzw. $(0, 0, z + \varepsilon)$ verlaufen.

Beispiele (für stetige Funktionen)

(1) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $f(\bar{x}) = c$ für jedes $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (konstante Funktion).
Aus der Definition folgt unmittelbar, daß f in \mathbb{R}^n stetig ist.

6/2/4/1

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $D(f) = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) := x + y$.

6/2/4/2

Behauptung: f ist in \mathbb{R}^2 stetig.

Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|f(x, y) - f(a, b)| = |x + y - (a + b)| = |x - a + y - b| \leq |x - a| + |y - b| := (\star).$$

g.z.z.: Es gibt ein $\delta > 0$, so daß für jedes $(x, y) \in D(f)$: Wenn $|(x, y) - (a, b)| < \delta$, so $(\star) < \varepsilon$.

Es ist

$$|(x, y) - (a, b)| = |(x - a, y - b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Wählt man $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
& |(x, y) - (a, b)| < \delta \\
& \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2 = \frac{\varepsilon^2}{4} \\
& \implies (x - a)^2, (y - b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \\
& \implies |x - a|, |y - b| < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Also $|f(x, y) - f(a, b)| \leq (\star) = |x - a| + |y - b| < \varepsilon$; damit leistet $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ das Verlangte.

Satz 6.8 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: 6/2/5
 f ist in \bar{a} stetig gdw f_1, \dots, f_m in \bar{a} stetig sind.

(D.h., Stetigkeit bei Vektorfunktionen ist komponentenweise Stetigkeit.)

Beweis. Zunächst gilt für beliebige Vektoren $\bar{c} = (c_1, \dots, c_k)$: 6/2/6

$$|c_i| \leq |\bar{c}| \leq |c_1| + \dots + |c_k| \text{ für alle } i.$$

Denn

$$\begin{aligned}
|c_i| &= \sqrt{c_i^2} \leq \sqrt{c_1^2 + \dots + c_k^2} = |\bar{c}| = \\
& |(c_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, c_i, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, c_k)| \leq \\
& |(c_1, 0, \dots, 0)| + \dots + |(0, \dots, 0, c_k)| = |c_1| + \dots + |c_k|.
\end{aligned}$$

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis.

(\implies) Sei f in \bar{a} stetig. Dann gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in D(f)$:

Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$.

Wegen $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| = \left| (f_1(\bar{x}) - f_1(\bar{a}), \dots, f_m(\bar{x}) - f_m(\bar{a})) \right|$ erhält man nach den obigen Ausführungen

$$|f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{a})| \leq |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, m.$$

Also wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{a})| < \varepsilon$ für $i = 1, \dots, m$.

(\impliedby) Seien jetzt f_1, \dots, f_m in \bar{a} stetig. Dann gilt für $i = 1, \dots, m$:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_i > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in D(f_i)$:

Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta_i$, so $|f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{a})| < \frac{\varepsilon}{m}$.

Wir wählen $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$; dann erhält man für $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$ sofort

$|f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{a})| < \frac{\varepsilon}{m}$, also

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| \leq |f_1(\bar{x}) - f_1(\bar{a})| + \dots + |f_m(\bar{x}) - f_m(\bar{a})| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Folglich ist f in \bar{a} stetig. \square

Bemerkung. Aufgrund von Satz 6.8 können Stetigkeitsuntersuchungen für Vektorfunktionen zurückgeführt werden auf Stetigkeitsuntersuchungen für reellwertige Funktionen. 6/2/7

Analog wie bei Funktionen einer reellen Veränderlichen läßt sich die Stetigkeit auch hier mit dem Grenzwertbegriff charakterisieren.

Definition. (*Grenzwert*)

6/2/8

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$, a ein Häufungspunkt von $D(f)$ und $c \in \mathbb{M}_2$.

f besitzt in a den Grenzwert c

$\stackrel{\text{Def}}{=} \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0, \text{ so daß für jedes } x \in D(f) \text{ mit } x \neq a \text{ gilt:}$

Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), c) < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$.

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und \bar{a} ein Häufungspunkt von $D(f)$, dann gilt:

6/2/9

f besitzt an der Stelle \bar{a} den Grenzwert $c \iff \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in D(f) \text{ mit } \bar{x} \neq \bar{a} \text{ gilt:}$ Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - c| < \varepsilon$.

Für reellwertige Funktionen lassen sich völlig analog wie im eindimensionalen Fall uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$ definieren.

Satz 6.9 Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$, a ein Häufungspunkt von $D(f)$ und $a \in D(f)$.

6/2/10

Dann gilt: f ist in a stetig gdw $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Beweis. Der Beweis kann völlig analog wie im Fall $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ geführt werden (vgl. Kapitel 5, Satz 5.2). Da hier aber neue Begriffe auftauchen, soll die Beweisidee noch einmal erläutert werden.

6/2/11

(\longrightarrow) Sei f in a stetig und $\varepsilon > 0$. Nach Definition der Stetigkeit gibt es dann ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in D(f)$ gilt:

Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Damit ist nach Definition des Grenzwertes:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ } (:= c)$.

(\longleftarrow) Ist $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, dann ist nach der Definition des Grenzwertes offenbar auch f in a stetig. \square

Bemerkung. Bei stetigen Funktionen können Limes und Funktion vertauscht werden:

6/2/12

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a)$,

insbesondere gilt für $x \rightarrow a$: $\lim f(g(x)) = f(\lim g(x)) = f(g(\lim x)) = f(g(a))$.

Satz 6.10 (*Folgenstetigkeit*)

6/2/13

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in D(f)$.

f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_i) in \mathbb{M}_1 mit $x_i \in D(f)$ gilt:

Wenn $x_i \rightarrow a_i$, so $f(x_i) \rightarrow f(a)$.

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog wie für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. \square

6/2/14

Bemerkung. Für uns sind natürlich die Fälle $\mathbb{M}_1 = \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{M}_2 = \mathbb{R}^m$ mit $m, n \geq 1$ von besonderem Interesse, auf die wir uns jetzt beschränken wollen. 6/2/15

Satz 6.11 *In euklidischen Räumen sind Summe, Differenz, Produkt, Quotient und die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig.* (Beim Produkt bzw. beim Quotienten werden nur solche Funktionen zugelassen, die aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R} abbilden!) 6/2/16

Beweis. Den Beweis führt man völlig analog wie für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 6/2/17
(Die obige Einschränkung für Produkte und Quotienten auf reellwertige Funktionen ist notwendig, da Produkt und Quotient von Vektoren i.a. nicht definiert sind.) \square