

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. Der n -dimensionale Vektorraum \mathbb{R}^n zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt *n -dimensionaler euklidischer Raum*. 6/1/3

Definition. (*Beschränktheit*) 6/1/18

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M ist *beschränkt* (in \mathbb{M})

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{M}$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß $M \subseteq U_\varepsilon(a)$
(d.h., M ist in einer Kugel – mit endlichem Radius ε – enthalten; also für jedes $x \in M$ gilt:
 $\varrho(x, a) < \varepsilon$; vgl. Abb. 6.3)

Definition. (*abgeschlossene Menge*) 6/1/26

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{M}$ ist *abgeschlossen*

$\overline{\text{Df}}$ Jeder Häufungspunkt von M gehört zu M .

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*) 6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Bez.: $\max_{\bar{x} \in M} f(\bar{x})$ bzw. $\min_{\bar{x} \in M} f(\bar{x})$. 6/3/15

Satz 6.15 (*Satz von Weierstraß*)

6/3/21

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $M \neq \emptyset$. Dann gilt:

Ist f in M stetig und M beschränkt und abgeschlossen, dann existieren Minimum und Maximum von f in M (d.h., es gibt Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in M$, so daß $f(\bar{a}) = \min f(M)$ und $f(\bar{b}) = \max f(M)$).