

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Korollar. Ist f in $[a, b]$ stetig, dann ist f in $[a, b]$ gleichmäßig stetig.

6/3/32

Definition. (*Lipschitz-Stetigkeit*)

6/3/36

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

f ist in M Lipschitz-stetig

$\stackrel{\text{Df}}{=} M \subseteq D(f)$ und es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$.

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 6.18 gilt im allgemeinen nicht.

6/3/40

Beispiel: Sei $f(x) = \sqrt{x}$ und $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

6/3/41

Als Wurzelfunktion ist f in $[a, b]$ stetig. Da $[0, 1]$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist f in $[0, 1]$ auch gleichmäßig stetig.

Angenommen, f ist in $[0, 1]$ Lipschitz-stetig.

Dann gibt es ein $c > 0$, so daß $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in [0, 1]$. Insbesondere für $y = 0$ und $x \in (0, 1]$ beliebig gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} \leq c \cdot |x - 0| = c \cdot x.$$

Also $\sqrt{x} \leq c \cdot x$ und damit $x \leq c^2 \cdot x^2 \implies 1 \leq c^2 \cdot x$ für alle $x \in (0, 1]$. Schließlich folgt $\frac{1}{c^2} \leq x$ für alle $x \in (0, 1]$. $\nexists!$