

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a stetig

$\stackrel{\text{Df}}{=} a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*gleichmäßige Stetigkeit*)

6/3/25

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $M \subseteq \mathbb{M}_1$.

f ist in M gleichmäßig stetig

$\stackrel{\text{Df}}{=} M \subseteq D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x, y \in M$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, y) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Satz 6.16 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

6/3/27

Ist f in M gleichmäßig stetig, dann ist f in M stetig.

Bemerkung. An einem Beispiel zeigen wir, daß die Umkehrung von Satz 6.16 im allgemeinen falsch ist.

6/3/29

Dazu sei $M = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$, also $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Offenbar ist f als rationale Funktion stetig in $(0, 1)$. f ist aber nicht gleichmäßig stetig in diesem Intervall. (vgl. Abb. 6.14)

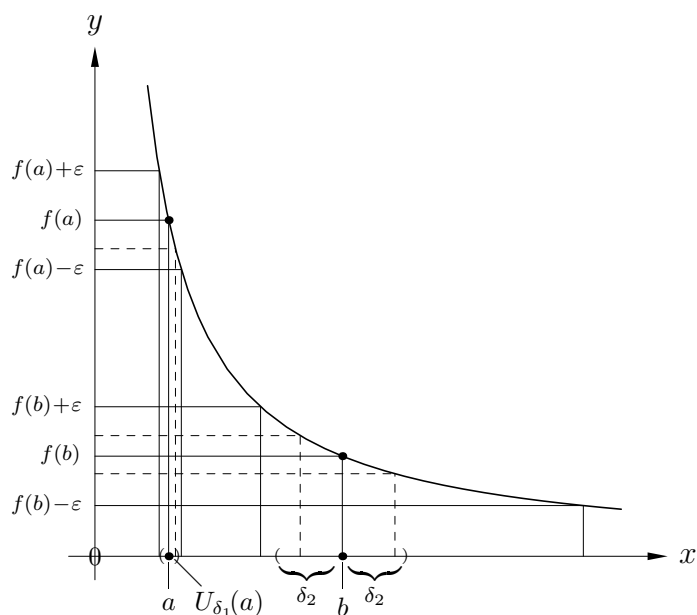


Abb. 6.14 Für das gleiche $\varepsilon > 0$ kann hier kein universelles $\delta > 0$ gewählt werden. Je näher man sich mit a dem Wert 0 nähert, desto kleiner muß die entsprechende δ -Umgebung genommen werden, damit die δ -Umgebung von a in die ε -Umgebung von $f(a)$ abgebildet wird. δ hängt sowohl von a als auch von ε ab.

Angenommen, f ist in $(0, 1)$ gleichmäßig stetig.

Speziell für $\varepsilon = 1$ gäbe es dann ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x, y \in (0, 1)$ gilt:

Wenn $|x - y| < \delta$, so $|f(x) - f(y)| < \varepsilon = 1$.

Wählt man $x = \frac{1}{n}$ und $y = \frac{1}{2n}$, dann ist

$$|x - y| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \delta$$

für hinreichend große n und

$$|f(x) - f(y)| = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) \right| = |n - 2n| = n \geq \varepsilon = 1. \quad \text{!}$$

Definition. (*Lipschitz-Stetigkeit*)

6/3/36

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

f ist in M *Lipschitz-stetig*

$\overline{\text{Def}}$ $M \subseteq D(f)$ und es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$.

Satz 6.18 besagt also, daß aus der Lipschitz-Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit folgt.

6/3/37

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 6.18 gilt im allgemeinen nicht.

6/3/40

Beispiel: Sei $f(x) = \sqrt{x}$ und $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

6/3/41

Als Wurzelfunktion ist f in $[a, b]$ stetig. Da $[0, 1]$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist f in $[0, 1]$ auch gleichmäßig stetig.

Angenommen, f ist in $[0, 1]$ Lipschitz-stetig.

Dann gibt es ein $c > 0$, so daß $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in [0, 1]$. Insbesondere für $y = 0$ und $x \in (0, 1]$ beliebig gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} \leq c \cdot |x - 0| = c \cdot x.$$

Also $\sqrt{x} \leq c \cdot x$ und damit $x \leq c^2 \cdot x^2 \implies 1 \leq c^2 \cdot x$ für alle $x \in (0, 1]$. Schließlich folgt $\frac{1}{c^2} \leq x$ für alle $x \in (0, 1]$. **N!**

Bemerkung. Lipschitz-Stetigkeit \implies gleichmäßige Stetigkeit \implies Stetigkeit.
Die Umkehrung gilt in all diesen Fällen nicht.

6/3/43
