

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.20 Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ und von $D_l(f, a)$. Dann gilt: 6/3/52
 f besitzt in a einen Grenzwert (der Größe c) \iff
 f besitzt in a einen rechtsseitigen Grenzwert ($:= c_r$) und einen linksseitigen Grenzwert ($:= c_l$) und beide Werte sind gleich ($c_r = c_l = c$).

Beweis. (\implies) f habe in a den Grenzwert c . Dann gilt:

6/3/53

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

$$\text{Wenn } |x - a| < \delta, \text{ so } |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Dies gilt insbesondere für alle x mit $x \in D_r(f, a) \subseteq D(f)$ bzw. $x \in D_l(f, a) \subseteq D(f)$.
 Damit ist c sowohl rechts- als auch linksseitiger Grenzwert von f in a .

(\impliedby) f besitze in a einen rechtsseitigen Grenzwert c_r und einen linksseitigen Grenzwert c_l mit $c_r = c_l := c$. Dann gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_r > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f, a)$:

$$\text{Wenn } |x - a| < \delta_r, \text{ so } |f(x) - \underbrace{c}_{=c_r}| < \varepsilon$$

und ein $\delta_l > 0$, so daß für jedes $x \in D_l(f, a)$:

$$\text{Wenn } |x - a| < \delta_l, \text{ so } |f(x) - \underbrace{c}_{=c_l}| < \varepsilon.$$

Für $\delta = \min\{\delta_r, \delta_l\}$ und für jedes $x \in \underbrace{D_r(f, a) \cup D_l(f, a)}_{D(f) - \{a\}}$ gilt dann:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$. □