

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.2 Stetigkeit

**Korollar** (Zwischenwertsatz)

5/2/23

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig,  $d \in \mathbb{R}$  beliebig und  $f(a) < d < f(b)$  oder  $f(a) > d > f(b)$ , dann existiert ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $f(c) = d$ .

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Satz 6.11** In euklidischen Räumen sind Summe, Differenz, Produkt, Quotient und die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig. (Beim Produkt bzw. beim Quotienten werden nur solche Funktionen zugelassen, die aus  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  abbilden!)

6/2/16

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Definition.** (bogenzusammenhängend)

6/3/5

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $M$  ist bogenzusammenhängend

$\overline{\text{Def}}$  Zu je zwei Punkten  $\bar{a}, \bar{b} \in M$  gibt es eine Kurve  $\mathfrak{k}$ , die ganz zu  $M$  gehört und die Punkte  $\bar{a}, \bar{b}$  miteinander verbindet. (vgl. Abb. 6.11 a)

**Satz 6.12** (Zwischenwertsatz)

6/3/7

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M \subseteq D(f)$ . Dann gilt:

Ist  $M$  bogenzusammenhängend und  $f$  stetig in  $M$  und sind  $\bar{a}, \bar{b} \in M$ , so daß  $f(\bar{a}) < d < f(\bar{b})$ , dann gibt es ein  $\bar{c} \in M$ , so daß  $f(\bar{c}) = d$ . (vgl. Abb. 6.12)

**Beweis.** Nach Voraussetzung sind  $\bar{a}, \bar{b} \in M$  und  $M$  ist bogenzusammenhängend. Dann gibt es eine Kurve  $\mathfrak{k}$ , die ganz zu  $M$  gehört und  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  verbindet. Folglich existiert ein Intervall  $[a, b]$  und eine stetige Funktion  $g = (g_1, \dots, g_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so daß  $\mathfrak{k} = \{g(t) : a \leq t \leq b\} \subseteq M$ , und  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{k}$ . Da  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  Bildelemente von  $g$  sind, existieren  $a', b' \in [a, b]$ , so daß  $g(a') = \bar{a}$  und  $g(b') = \bar{b}$ .

Sei o.B.d.A.  $a' < b'$ .

Wegen  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $W(g) = \mathfrak{k} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $M \subseteq D(f)$  ist  $f \circ g$  in  $[a, b]$  definiert.

Sei  $h(t) := f(g(t))$ , und somit  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wegen  $[a', b'] \subseteq [a, b]$  ist  $h$  auch in  $[a', b']$  definiert, und es gilt

$$h(a') = f(\underbrace{g(a')}_{=\bar{a}}) = f(\bar{a}) < d \quad \text{und}$$

6/3/9

$$h(b') = f\left(\underbrace{g(b')}_{=\bar{b}}\right) = f(\bar{b}) > d.$$

Da die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig ist, ist  $h$  mit  $h : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann existiert *nach dem Zwischenwertsatz für Funktionen einer Veränderlichen* ein  $c' \in (a', b')$ , so daß  $h(c') = d = f\left(\underbrace{g(c')}_{:=\bar{c}}\right)$ .

$\bar{c} = g(c') \in \mathfrak{k} \subseteq M$  leistet das Verlangte.  $\square$