

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*Kurve*)

6/3/1

\mathfrak{k} ist eine *Kurve* in \mathbb{R}^n

$\overline{\text{Def}}$ Es gibt ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ und eine stetige Vektorfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so daß $\mathfrak{k} := \{f(t) : a \leq t \leq b\}$.

(D.h., es gibt stetige Funktionen $f_1, \dots, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ und \mathfrak{k} das Bild der Funktion f in \mathbb{R}^n ist.)

Diese Darstellung der Kurve heißt auch *Parameterdarstellung* mit Hilfe des *Parameterintervalls* $[a, b]$. Die Stetigkeit ist notwendig, damit die Kurve zu einer „durchgezogenen“ Linie wird.

6/3/2

Zwei Punkte \bar{a}, \bar{b} werden durch die Kurve \mathfrak{k} *verbunden*, wenn $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{k}$.

Beispiele.

1. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

6/3/3/1

Wir betrachten $[a, b]$ als Parameterintervall und $\mathfrak{k} = \{(t, f(t)) : a \leq t \leq b\}$.

Dann ist die Funktion f (dargestellt im zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2) genau die Kurve \mathfrak{k} , die sich mit Hilfe der Vektorfunktion $g = (g_1, g_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ beschreiben läßt, wobei $g_1(t) := t$ und $g_2(t) := f(t)$. (vgl. Abb. 6.9)

2. Es sei $f_1(t) := t \cdot \cos t$, $f_2(t) := t \cdot \sin t$ und $f = (f_1, f_2) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

6/3/3/2

Dann ist $\mathfrak{k} = \{(f_1(t), f_2(t)) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ eine Kurve in \mathbb{R}^2 , denn f ist eine stetige Vektorfunktion. (vgl. Abb. 6.10)

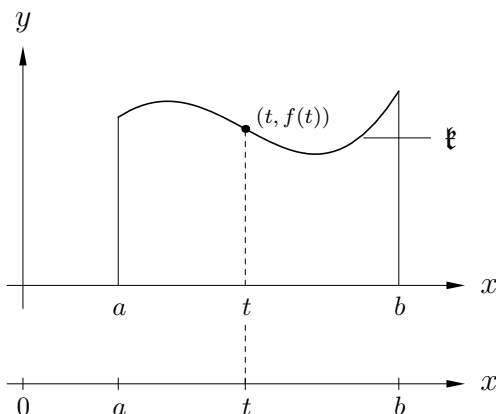


Abb. 6.9 Das Bild der Vektorfunktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(t) := (t, f(t))$ ist die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Es ist $\mathfrak{k} = \{g(t) : a \leq t \leq b\}$.

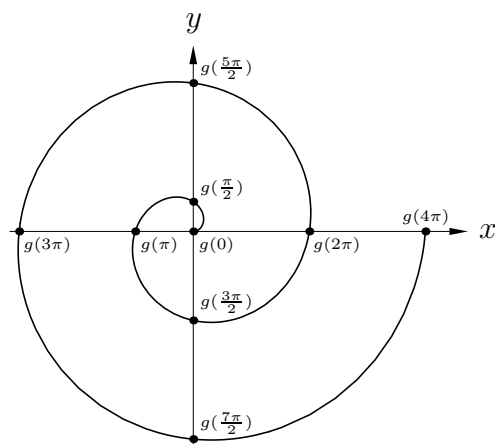


Abb. 6.10 Das Bild von $g : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(t) = (t \cos t, t \sin t)$ zeigt eine Spirale, die durch keine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist.

Definition. (*bogenzusammenhängend*)

6/3/5

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M ist *bogenzusammenhängend*

$\overline{\text{Df}}$ Zu je zwei Punkten $\bar{a}, \bar{b} \in M$ gibt es eine Kurve \mathfrak{k} , die ganz zu M gehört und die Punkte \bar{a}, \bar{b} miteinander verbindet. (vgl. Abb. 6.11 a)

6/3/6

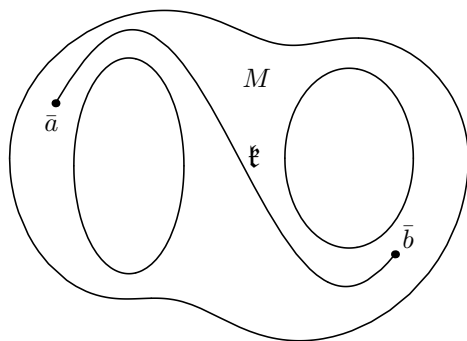


Abb. 6.11 a zeigt eine bogenzusammenhängende Menge, denn je zwei Punkte aus M lassen sich durch eine Kurve in M miteinander verbinden.

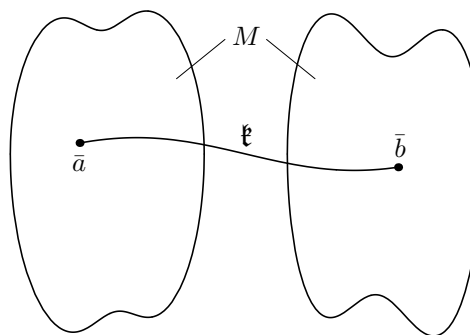


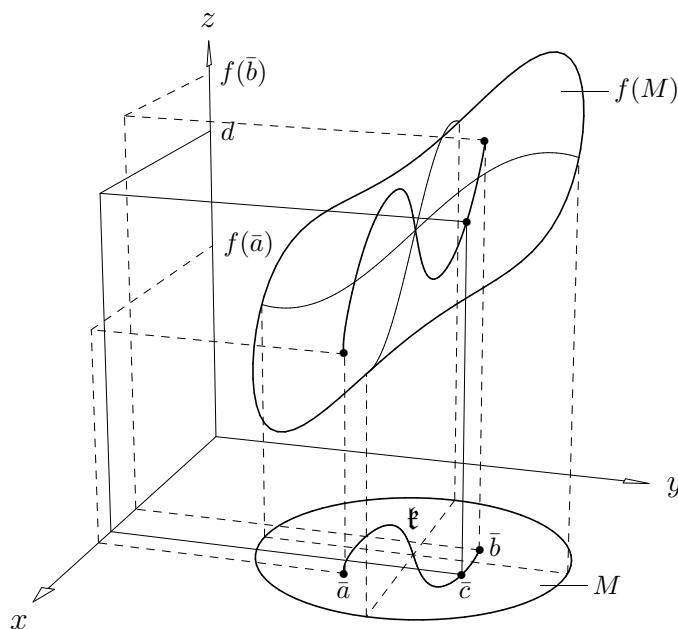
Abb. 6.11 b Die hier dargestellte Menge ist nicht bogenzusammenhängend, da es keine Kurve gibt, die \bar{a} und \bar{b} verbindet und ganz in M verläuft.

Satz 6.12 (*Zwischenwertsatz*)

6/3/7

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$. Dann gilt:

Ist M bogenzusammenhängend und f stetig in M und sind $\bar{a}, \bar{b} \in M$, so daß $f(\bar{a}) < d < f(\bar{b})$, dann gibt es ein $\bar{c} \in M$, so daß $f(\bar{c}) = d$. (vgl. Abb. 6.12)



6/3/8

Abb. 6.12 Die Elemente \bar{a}, \bar{b} sind durch eine Kurve \mathfrak{k} verbunden. Die Funktion f , eingeschränkt auf die Menge $\mathfrak{k} \subseteq M$, erzeugt eine stetige Funktion einer reellen Veränderlichen, für die der Zwischenwertsatz schon gilt. An der Stelle \bar{c} nimmt f den Wert d an.

Beweis. Nach Voraussetzung sind $\bar{a}, \bar{b} \in M$ und M ist bogenzusammenhängend. 6/3/9

Dann gibt es eine Kurve \mathfrak{k} , die ganz zu M gehört und \bar{a} und \bar{b} verbindet. Folglich existiert ein Intervall $[a, b]$ und eine stetige Funktion $g = (g_1, \dots, g_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so daß $\mathfrak{k} = \{g(t) : a \leq t \leq b\} \subseteq M$, und $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{k}$. Da \bar{a} und \bar{b} Bildelemente von g sind, existieren $a', b' \in [a, b]$, so daß $g(a') = \bar{a}$ und $g(b') = \bar{b}$.

Sei o.B.d.A. $a' < b'$.

Wegen $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $W(g) = \mathfrak{k} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $M \subseteq D(f)$ ist $f \circ g$ in $[a, b]$ definiert.

Sei $h(t) := f(g(t))$, und somit $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Wegen $[a', b'] \subseteq [a, b]$ ist h auch in $[a', b']$ definiert, und es gilt

$$\begin{aligned} h(a') &= f\left(\underbrace{g(a')}_{=\bar{a}}\right) = f(\bar{a}) < d \quad \text{und} \\ h(b') &= f\left(\underbrace{g(b')}_{=\bar{b}}\right) = f(\bar{b}) > d. \end{aligned}$$

Da die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig ist, ist h mit $h : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert nach dem Zwischenwertsatz für Funktionen einer Veränderlichen ein $c' \in (a', b')$, so daß $h(c') = d = f\left(\underbrace{g(c')}_{:=\bar{c}}\right)$.

$\bar{c} = g(c') \in \mathfrak{k} \subseteq M$ leistet das Verlangte. \square

Bemerkung. In bogenzusammenhängenden Mengen haben stetige (reellwertige) Funktionen die Zwischenwerteigenschaft. 6/3/10

Satz 6.13 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}$. 6/3/11

Ist f in \bar{a} stetig und $f(\bar{a}) > 0$ (bzw. $f(\bar{a}) < 0$), dann gibt es eine Umgebung $U(\bar{a})$, so daß $f(\bar{x}) > 0$ (bzw. $f(\bar{x}) < 0$) für alle $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$.

Beweis. Sei $f(\bar{a}) > 0$ (den Fall $f(\bar{a}) < 0$ beweist man analog). 6/3/12

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es für jede Umgebung $U(\bar{a})$ ein $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$, so daß $f(\bar{x}) \leq 0$.

Für die Umgebungen $U(\bar{a}) := U_{\varepsilon_n}(\bar{a})$ mit $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, existieren dann Elemente $\bar{x}_n \in U_{\varepsilon_n}(\bar{a}) \cap D(f)$, so daß $f(\bar{x}_n) \leq 0$.

Es entsteht also eine Folge (\bar{x}_n) mit $\bar{x}_n \rightarrow \bar{a}$. Nach Voraussetzung ist f in \bar{a} stetig, folglich existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_n) = f(\bar{a})$. Wegen $f(\bar{x}_n) \leq 0$ erhält man aus Satz 3.10 (6)

sofort $f(\bar{a}) = \lim f(\bar{x}_n) \leq 0$. $\nexists!$ (Siehe hierzu auch die Abbildungen 6.8 a und 6.8 b) \square

Definition. (Beschränktheit bei Funktionen) 6/3/13

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist in M beschränkt

$\overline{\text{Df}} \quad f(M) = \{f(a) : a \in M\}$ ist beschränkt.

- (2) f ist beschränkt
 $\overline{\text{Def}}$ f ist in $D(f)$ beschränkt.

Bemerkung. Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $f(M)$ eine Menge von reellen Zahlen. Folglich gilt: 6/3/14

$f(M)$ ist beschränkt \iff
 $f(M)$ ist nach oben und nach unten beschränkt \iff
es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $|f(\bar{x})| \leq c$ für jedes $\bar{x} \in M$.

Dann existieren $\sup f(M) := \sup_{\bar{x} \in M} f(\bar{x})$ und $\inf f(M) := \inf_{\bar{x} \in M} f(\bar{x})$.

Wenn $\sup f(M) \in f(M)$ bzw. $\inf f(M) \in f(M)$, dann sind $\sup f(M)$ bzw. $\inf f(M)$ das Maximum bzw. das Minimum von $f(M)$.

Bez.: $\max_{\bar{x} \in M} f(\bar{x})$ bzw. $\min_{\bar{x} \in M} f(\bar{x})$. 6/3/15

Satz 6.14 Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist f in M stetig, und ist M beschränkt und abgeschlossen, dann ist auch $f(M)$ beschränkt und abgeschlossen. 6/3/16

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $f(M)$ beschränkt ist. 6/3/17

Angenommen, $f(M)$ ist nicht beschränkt.

Dann gilt: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\bar{x} \in M$, so daß $|f(\bar{x})| \geq c$.

Speziell für $c = c_i = i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ existieren dann Elemente $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots \in M$, so daß $|f(\bar{x}_i)| \geq c_i = i$.

Wegen $\bar{x}_i \in M$ ist die Folge (\bar{x}_i) beschränkt, folglich besitzt (\bar{x}_i) einen Häufungspunkt \bar{a} und eine gegen \bar{a} konvergente Teilfolge (\bar{x}_{i_j}) .

Wenn $\bar{x}_{i_j} = \bar{a}$ für ein j , dann ist $\bar{a} \in M$.

Wenn $\bar{x}_{i_j} \neq \bar{a}$ für alle j , dann ist \bar{a} ein Häufungspunkt der Menge

$\{\bar{x}_{i_j} : j = 0, 1, 2, \dots\}$, und damit ist auch $\bar{a} \in M$, denn M ist abgeschlossen.

Folglich ist f in \bar{a} definiert und stetig. Wegen $\bar{x}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ gilt: $f(\bar{x}_{i_j}) \rightarrow f(\bar{a})$.

Andererseits ist $|f(\bar{x}_{i_j})| \geq c_{i_j} = i_j \rightarrow \infty$. Daher ist $(f(\bar{x}_{i_j}))$ unbeschränkt und somit nicht konvergent. **M!**

Wir zeigen nun, daß $f(M)$ abgeschlossen ist, d.h., ist b ein Häufungspunkt von $f(M)$, dann ist $b \in f(M)$.

Sei b ein Häufungspunkt von $f(M)$. Dann gibt es eine Folge (b_i) mit $b_i \in f(M)$ und $b_i \rightarrow b$. Wegen $b_i \in f(M)$ gibt es ein $\bar{x}_i \in M$, so daß $b_i = f(\bar{x}_i)$. Man erhält also eine Folge (\bar{x}_i) in M , die beschränkt ist, da ja M beschränkt ist. Folglich besitzt (\bar{x}_i) einen Häufungspunkt \bar{a} und eine Teilfolge (\bar{x}_{i_j}) , die gegen \bar{a} konvergiert.

Wie im ersten Teil des Beweises ist $\bar{a} \in M$ und damit $f(\bar{a}) \in f(M)$, folglich ist f in \bar{a} stetig.

Wegen $\bar{x}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ gilt: $b_{i_j} = f(\bar{x}_{i_j}) \rightarrow f(\bar{a}) = b \implies$

$f(\bar{a}) = b \in f(M)$. \square

Korollar. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

6/3/18

Ist f in $[a, b]$ stetig, dann ist f in $[a, b]$ beschränkt (und $f([a, b])$ ist abgeschlossen.)

Beweis. Der Beweis ist nach dem vorhergehenden Satz trivial. \square

6/3/19

Beispiel (dafür, daß der Satz nicht gilt, wenn M nicht abgeschlossen ist)

6/3/20

$f(x) = \frac{1}{x}$, $M = (0, 1]$. Offenbar ist f in M nicht beschränkt.

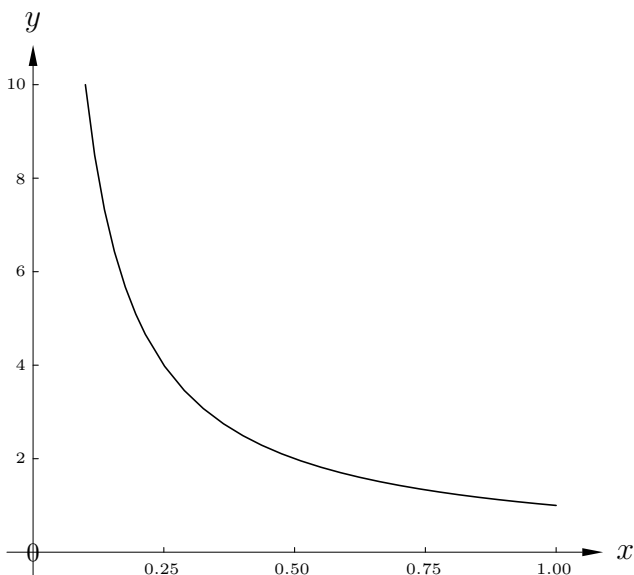


Abb. 6.13 f ist in $(0, 1]$ offenbar nicht beschränkt. Für $x \rightarrow 0$ und $x > 0$ gilt: $f(x) \rightarrow \infty$.

Die Maßstäbe für die x -Achse bzw. für die y -Achse wurden bewußt unterschiedlich gewählt, um das Anwachsen von f in der Nähe von 0 besser verdeutlichen zu können.

Satz 6.15 (Satz von Weierstraß)

6/3/21

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $M \neq \emptyset$. Dann gilt:

Ist f in M stetig und M beschränkt und abgeschlossen, dann existieren Minimum und Maximum von f in M (d.h., es gibt Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in M$, so daß $f(\bar{a}) = \min f(M)$ und $f(\bar{b}) = \max f(M)$).

Beweis. Wir zeigen, daß f in M ein Maximum besitzt; für das Minimum erfolgt der Beweis analog.

6/3/22

Nach Satz 6.14 ist $f(M)$ beschränkt, folglich existiert $\alpha := \sup f(M)$.

g.z.z.: $\alpha \in M$, denn dann ist α das Maximum von $f(M)$.

Annahme: $\alpha \notin f(M)$.

Wegen $\alpha = \sup f(M)$ ist dann $\alpha > f(\bar{x})$ für alle $\bar{x} \in M$.

Nach Definition des Supremums gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b \in f(M)$, so daß $\alpha > b > \alpha - \varepsilon$. Also in jeder ε -Umgebung von α liegt ein Punkt $b \in f(M)$ und $b \neq \alpha$; somit ist α ein Häufungspunkt von $f(M)$.

Nach Satz 6.14 ist $f(M)$ abgeschlossen, folglich ist $\alpha \in f(M)$. $\nabla!$ \square

Korollar. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a < b$.

6/3/23

Ist f in $[a, b]$ stetig, dann gilt:

(1) f besitzt in $[a, b]$ ein Minimum und ein Maximum

(d.h., es existieren $a', b' \in [a, b]$, so daß $f(a') = \max f([a, b])$ und $f(b') = \min f([a, b])$).

(2) $f([a, b]) = [\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x)]$.

Beweis. (1) folgt direkt aus dem vorhergehenden Satz.

6/3/24

(2). Minimum und Maximum von f sind Funktionswerte. Nach dem Zwischenwertsatz werden auch alle Zwischenwerte angenommen. \square

Definition. (gleichmäßige Stetigkeit)

6/3/25

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $M \subseteq \mathbb{M}_1$.

f ist in M gleichmäßig stetig

$\overline{\text{Df}}$ $M \subseteq D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x, y \in M$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, y) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Stetigkeit in einer Menge ist immer punktweise Stetigkeit, d.h., eine Funktion f ist in einer Menge M stetig gdw f in jedem Punkt aus M stetig ist.

6/3/26

Wir wollen jetzt anhand einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ den Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit von f in einer Menge M herausarbeiten, wobei man sich unter M ein Intervall vorstellen möge. (Wir wählen hierfür eine formale Schreibweise, um den Unterschied deutlicher hervortreten zu lassen.)

f ist in M stetig \iff

$\forall y \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon),$ und

f ist in M gleichmäßig stetig \iff

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon),$

Bei der Stetigkeit in der Menge M hängt δ von ε und von der betrachteten Stelle $y \in M$ ab; bei der gleichmäßigen Stetigkeit hängt δ nur von ε ab.

Wir werden jetzt zeigen, daß aus der gleichmäßigen Stetigkeit die Stetigkeit folgt, daß aber die Umkehrung im allgemeinen falsch ist. Hierbei beschränken wir uns wieder auf reellwertige Funktionen.

Satz 6.16 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

6/3/27

Ist f in M gleichmäßig stetig, dann ist f in M stetig.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus den Definitionen.

6/3/28

Es sei $\bar{a} \in M$.

g.z.z.: f ist in \bar{a} stetig.

Wählt man in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit speziell $y = \bar{a}$, dann erhält man: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in M$ gilt:
Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$. \square

Bemerkung. An einem Beispiel zeigen wir, daß die Umkehrung von Satz 6.16 im allgemeinen falsch ist. 6/3/29

Dazu sei $M = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$, also $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Offenbar ist f als rationale Funktion stetig in $(0, 1)$. f ist aber nicht gleichmäßig stetig in diesem Intervall. (vgl. Abb. 6.14)

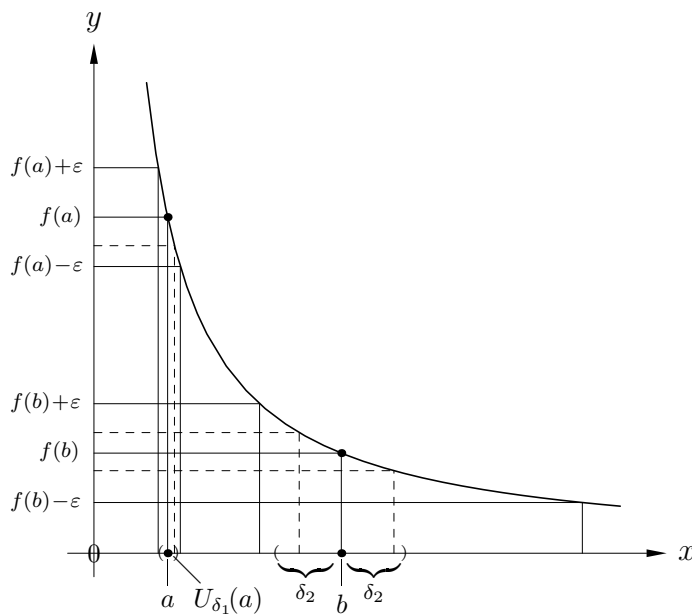


Abb. 6.14 Für das gleiche $\varepsilon > 0$ kann hier kein universelles $\delta > 0$ gewählt werden. Je näher man sich mit a dem Wert 0 nähert, desto kleiner muß die entsprechende δ -Umgebung genommen werden, damit die δ -Umgebung von a in die ε -Umgebung von $f(a)$ abgebildet wird. δ hängt sowohl von a als auch von ε ab.

Angenommen, f ist in $(0, 1)$ gleichmäßig stetig.

Speziell für $\varepsilon = 1$ gäbe es dann ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x, y \in (0, 1)$ gilt:

Wenn $|x - y| < \delta$, so $|f(x) - f(y)| < \varepsilon = 1$.

Wählt man $x = \frac{1}{n}$ und $y = \frac{1}{2n}$, dann ist

$$|x - y| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \delta$$

für hinreichend große n und

$$|f(x) - f(y)| = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) \right| = |n - 2n| = n \geq \varepsilon = 1. \quad \text{!}$$

Satz 6.17 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

6/3/30

Ist f in M stetig und M beschränkt und abgeschlossen, dann ist f in M gleichmäßig stetig.

Beweis. Annahme: f ist in M nicht gleichmäßig stetig.

6/3/31

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta > 0$ Elemente $\bar{x}, \bar{y} \in M$ existieren mit $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$ und $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \geq \varepsilon$.

Wir wählen jetzt $\delta = \delta_i := \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Für δ_i existieren dann Elemente $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in M$ mit $|\bar{x}_i - \bar{y}_i| < \delta_i < \frac{1}{i}$ und $|f(\bar{x}_i) - f(\bar{y}_i)| \geq \varepsilon$.

Da M beschränkt ist, ist auch die Folge (\bar{x}_i) beschränkt. Folglich besitzt (\bar{x}_i) einen Häufungspunkt \bar{a} und eine gegen \bar{a} konvergente Teilfolge \bar{x}_{i_j} .

Da M abgeschlossen ist, gilt (analog wie im Beweis von Satz 6.14) $\bar{a} \in M$. Damit ist f in \bar{a} definiert und stetig.

Für die Teilfolge (\bar{y}_{i_j}) von (\bar{y}_i) gilt:

$$|\bar{y}_{i_j} - \bar{a}| \leq \underbrace{|\bar{y}_{i_j} - \bar{x}_{i_j}|}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{|\bar{x}_{i_j} - \bar{a}|}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0} \implies \bar{y}_{i_j} \longrightarrow \bar{a}.$$

Wegen $\bar{x}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ und $\bar{y}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ gilt:

$$f(\bar{x}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a}) \quad \text{und} \quad f(\bar{y}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a}).$$

Also

$$\underbrace{|f(\bar{x}_{i_j}) - f(\bar{y}_{i_j})|}_{\geq \varepsilon} \leq \underbrace{|f(\bar{x}_{i_j}) - f(\bar{a})|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(\bar{a}) - f(\bar{y}_{i_j})|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

falls j hinreichend groß ist. $\nexists!$ \square

Korollar. Ist f in $[a, b]$ stetig, dann ist f in $[a, b]$ gleichmäßig stetig.

6/3/32

Beweis. Da $M := [a, b]$ beschränkt und abgeschlossen ist, folgt die Behauptung sofort aus Satz 6.17. \square

6/3/33

Satz 6.18 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

6/3/34

Existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $\bar{x}, \bar{y} \in M$ gilt:

$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$, dann ist f in M gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei o.B.d.A. $c > 0$ und $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$ für alle $\bar{x}, \bar{y} \in M$.

6/3/35

Weiterhin sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

Dann gilt für jedes $\bar{x}, \bar{y} \in M$ mit $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta = \frac{\varepsilon}{c}$:

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}| < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Folglich ist f in M gleichmäßig stetig. \square

Definition. (*Lipschitz-Stetigkeit*)

6/3/36

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

f ist in M *Lipschitz-stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $M \subseteq D(f)$ und es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$.

Satz 6.18 besagt also, daß aus der Lipschitz-Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit folgt. 6/3/37

Korollar. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

6/3/38

Ist f in $[a, b]$ Lipschitz-stetig, dann ist f in $[a, b]$ gleichmäßig stetig.

Beweis. Trivial. \square

6/3/39

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 6.18 gilt im allgemeinen nicht.

6/3/40

Beispiel: Sei $f(x) = \sqrt{x}$ und $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

6/3/41

Als Wurzelfunktion ist f in $[a, b]$ stetig. Da $[0, 1]$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist f in $[0, 1]$ auch gleichmäßig stetig.

Angenommen, f ist in $[0, 1]$ Lipschitz-stetig.

Dann gibt es ein $c > 0$, so daß $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in [0, 1]$. Insbesondere für $y = 0$ und $x \in (0, 1]$ beliebig gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} \leq c \cdot |x - 0| = c \cdot x.$$

Also $\sqrt{x} \leq c \cdot x$ und damit $x \leq c^2 \cdot x^2 \implies 1 \leq c^2 \cdot x$ für alle $x \in (0, 1]$. Schließlich folgt $\frac{1}{c^2} \leq x$ für alle $x \in (0, 1]$. $\nexists!$

Bemerkung. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f in M erhält man für $x, y \in M$ und $x \neq y$:

6/3/42

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq c,$$

d.h., der sog. *Differenzenquotient*, der uns noch in der Differentialrechnung begegnen wird, ist in M durch c beschränkt.

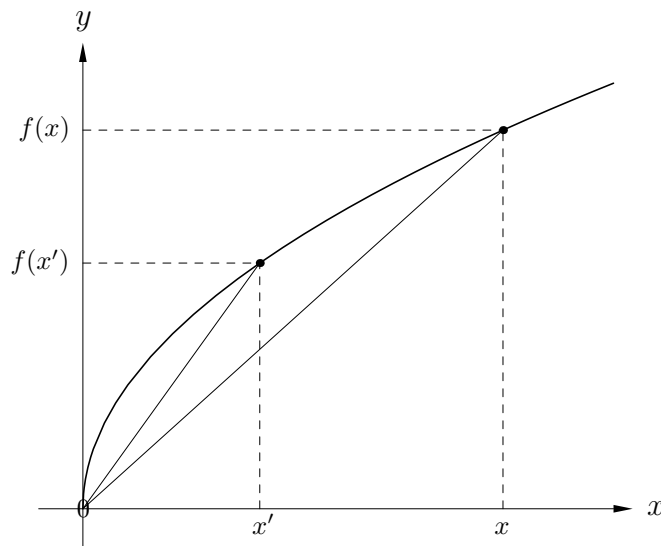


Abb. 6.15 Der Anstieg der Sekante zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(x, f(x))$ mit $x > 0$ ist gegeben durch $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Für $f(x) = \sqrt{x}$ erhält man daraus $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wenn $x \rightarrow 0$ und $x > 0$, so ist $\left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right| = \frac{1}{|\sqrt{x}|} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ offenbar nicht beschränkt.

Bemerkung. Lipschitz-Stetigkeit \implies gleichmäßige Stetigkeit \implies Stetigkeit. Die Umkehrung gilt in all diesen Fällen nicht. 6/3/43

Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. 6/3/44

Zunächst führen wir eine neue Bezeichnung ein: Eine in \mathbb{R}^n abgeschlossene und beschränkte Menge nennen wir auch *kompakt*.

Wir werden den Kompaktheitsbegriff später noch präzisieren und zeigen, daß er in \mathbb{R}^n genau mit der obigen Bezeichnung zusammenfällt.

- (1) In bogenzusammenhängenden Mengen haben stetige Funktionen die Zwischenwerteigenschaft.
- (2) Ist eine stetige Funktion f an einer Stelle a positiv bzw. negativ, dann gibt es eine ganze Umgebung $U(a)$, so daß f in $U(a) \cap D(f)$ positiv bzw. negativ ist.
- (3) Ist M kompakt und f stetig in M , dann ist auch $f(M)$ kompakt.
- (4) Stetige Funktionen besitzen in kompakten Mengen ($\neq \emptyset$) ein Minimum und ein Maximum.
- (5) Funktionen, die in kompakten Mengen stetig sind, sind dort auch gleichmäßig stetig.
- (6) Lipschitz-Stetigkeit \implies gleichmäßige Stetigkeit \implies Stetigkeit.
 $\quad \quad \quad \Longleftarrow \quad \quad \quad \Longleftarrow$
- (7) Als wichtige Spezialfälle treten die entsprechenden Korollare für Funktionen einer Veränderlichen auf.

Zum Abschluß dieses Kapitels betrachten wir nur noch reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen. 6/3/45

Bei solchen Funktionen interessiert man sich häufig für das links- bzw. rechtsseitige Verhalten der Funktion an einer bestimmten Stelle $a \in \mathbb{R}$.

Im folgenden seien stets $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Abbildungen zeigen Beispiele für das Verhalten von f an einer Stelle.

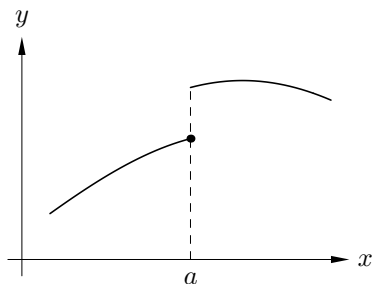


Abb. 6.16 a

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{für } x \leq a, \\ h(x), & \text{für } x > a \end{cases}$$

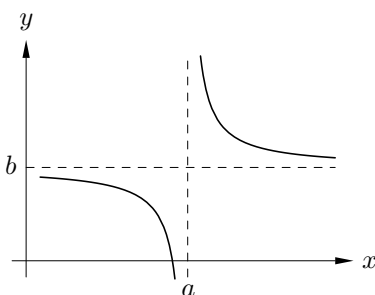


Abb. 6.16 b

$$f(x) = \frac{1}{x-a} + b$$

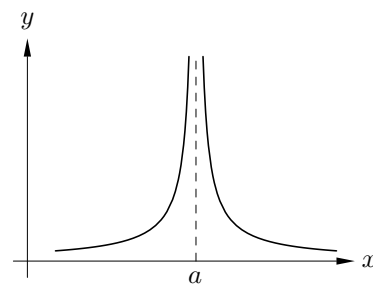


Abb. 6.16 c

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$$

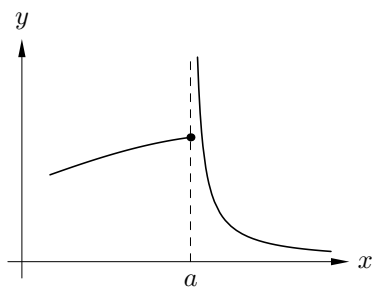


Abb. 6.16 d

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{für } x \leq a, \\ \frac{1}{x-a}, & \text{für } x > a \end{cases}$$

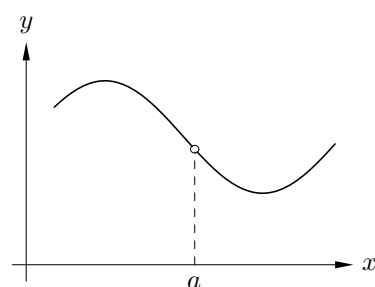


Abb. 6.16 e f ist an der Stelle a nicht definiert

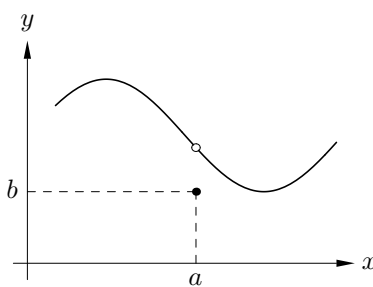


Abb. 6.16 f

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \neq a, \\ b, & \text{für } x = a \end{cases}$$

Diese Beispiele geben Anlaß zu folgenden Definitionen.

Definition. (*rechtsseitig* bzw. *linksseitig stetig*)

6/3/46

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *rechtsseitig* (bzw. *linksseitig*) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \geq a$ (bzw. $x \leq a$) gilt:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Analog läßt sich die links- bzw. rechtsseitige Grenzwertbildung definieren.

6/3/47

Definition. (*rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert*)

6/3/48

Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a) := D(f) \cap \{x : x > a\}$

bzw. von $D_l(f, a) := D(f) \cap \{x : x < a\}$.

f besitzt an der Stelle a (oder in a) den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* c

$\stackrel{\text{Def}}{=} \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0, \text{ so daß für jedes } x \in D_r(f, a) \text{ bzw.}$

für jedes $x \in D_l(f, a)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

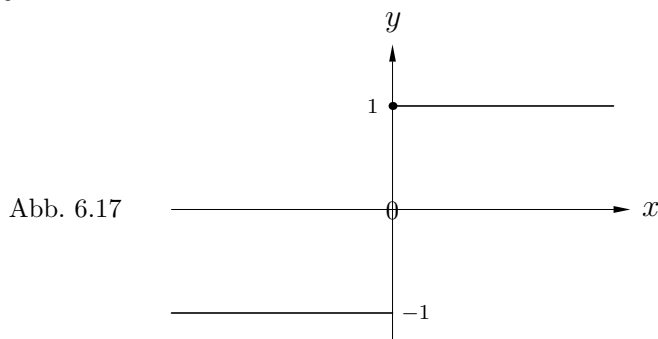
$$\text{Bez.: } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c \quad \text{bzw.}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c$$

Beispiel.

6/3/49

Sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0, \\ -1, & \text{für } x < 0. \end{cases}$



An der Stelle $a = 0$ ist f rechtsseitig, aber nicht linksseitig stetig.

Nach Definition ist $f(0) = 1$. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig und z.B. $\delta = \varepsilon$.

Dann gilt:

Für jedes $x \in D_r(f, 0)$ (also $x > 0$) mit der Eigenschaft $|x - 0| < \delta$ ist

$$\underbrace{|f(x) - f(0)|}_{=1} = 0 < \varepsilon.$$

Aber z.B. für $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig gilt:

$$\text{Wenn } x \in D_l(f, 0) \text{ (also } x < 0), \text{ so ist } \underbrace{|f(x) - f(0)|}_{=-1} = |-2| \geq \varepsilon.$$

Andererseits besitzt f jedoch einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Grenzwert: 1 bzw. -1, die voneinander verschieden sind, und außerdem ist der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle 0 verschieden von dem Funktionswert $f(0)$.

Satz 6.19 Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ bzw. von $D_l(f, a)$. Dann gilt:

6/3/50

f ist in a rechtsseitig bzw. linksseitig stetig \iff

$a \in D(f)$ und f besitzt in a den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert $f(a)$

$\iff a \in D(f)$ und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:

Wenn $x_n \searrow a$ bzw. $x_n \nearrow a$, so $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

Beweis. Die Beweise führt man völlig analog wie die zu den Sätzen 5.2 und 5.3, wo die Stetigkeit mit Hilfe des Grenzwertbegriffs charakterisiert wurde. Man schränkt sich hier lediglich auf die linksseitige bzw. rechtsseitige Umgebung des Punktes a ein. \square 6/3/51

Satz 6.20 Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ und von $D_l(f, a)$. Dann gilt:
 f besitzt in a einen Grenzwert (der Größe c) \iff
 f besitzt in a einen rechtsseitigen Grenzwert ($:= c_r$) und einen linksseitigen Grenzwert ($:= c_l$) und beide Werte sind gleich ($c_r = c_l = c$). 6/3/52

Beweis. (\implies) f habe in a den Grenzwert c . Dann gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt: 6/3/53

$$\text{Wenn } |x - a| < \delta, \text{ so } |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Dies gilt insbesondere für alle x mit $x \in D_r(f, a) \subseteq D(f)$ bzw. $x \in D_l(f, a) \subseteq D(f)$.
Damit ist c sowohl rechts- als auch linksseitiger Grenzwert von f in a .

(\impliedby) f besitze in a einen rechtsseitigen Grenzwert c_r und einen linksseitigen Grenzwert c_l mit $c_r = c_l := c$. Dann gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_r > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f, a)$:

$$\text{Wenn } |x - a| < \delta_r, \text{ so } |f(x) - \underbrace{c}_{=c_r}| < \varepsilon$$

und ein $\delta_l > 0$, so daß für jedes $x \in D_l(f, a)$:

$$\text{Wenn } |x - a| < \delta_l, \text{ so } |f(x) - \underbrace{c}_{=c_l}| < \varepsilon.$$

Für $\delta = \min\{\delta_r, \delta_l\}$ und für jedes $x \in \underbrace{D_r(f, a) \cup D_l(f, a)}_{D(f) - \{a\}}$ gilt dann:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$. \square

Satz 6.21 Sei f in a definiert und a sei ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ und von $D_l(f, a)$. Dann gilt:
 f ist in a stetig \iff f besitzt in a einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Grenzwert und beide Werte sind gleich $f(a)$. 6/3/54

Beweis. f ist in a stetig \iff 6/3/55
 f besitzt in a den Grenzwert $f(a)$ (vgl. Satz 5.2) \iff
 f besitzt in a den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert $f(a)$ (vgl. Satz 6.20). \square

Korollar. Sei f in a definiert und sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ und von $D_l(f, a)$. Dann gilt:
 f ist in a stetig \iff f ist in a linksseitig und rechtsseitig stetig. 6/3/56

Beweis. f ist in a stetig \iff

6/3/57

f besitzt in a den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert $f(a)$ \iff

f ist in a linksseitig und rechtsseitig stetig. (nach den Sätzen 6.21 und 6.19) \square

Bemerkung. Für die verschiedenen „Typen“ von Grenzwerten sind insgesamt 15 Fälle möglich: 6/3/58

Für $x \rightarrow a$, $x \nearrow a$, $x \searrow a$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ besitzt f einen Grenzwert c bzw. den uneigentlichen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$.