

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Definition.** Der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt  *$n$ -dimensionaler euklidischer Raum*. 6/1/3

**Definition.** (*Beschränktheit*) 6/1/18

Es sei  $M \subseteq \mathbb{M}$ .

$M$  ist *beschränkt* (in  $\mathbb{M}$ )

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{M}$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $M \subseteq U_\varepsilon(a)$   
(d.h.,  $M$  ist in einer Kugel – mit endlichem Radius  $\varepsilon$  – enthalten; also für jedes  $x \in M$  gilt:  
 $\varrho(x, a) < \varepsilon$ ; vgl. Abb. 6.3)

**Definition.** (*abgeschlossene Menge*) 6/1/26

Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{M}$  ist *abgeschlossen*

$\overline{\text{Df}}$  Jeder Häufungspunkt von  $M$  gehört zu  $M$ .

#### 6.5 Einige wichtige Ergänzungen

**Definition.** (*kompakt*) 6/5/3

Es sei  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq \mathbb{M}$ .

(1)  $M$  ist *kompakt*

$\overline{\text{Df}}$  Jede offene Überdeckung von  $M$  enthält eine endliche Teilüberdeckung von  $M$  (d.h., ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ , dann existiert ein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}_0 := \{U_1, \dots, U_m\} \subseteq \mathcal{U}$ , so daß schon  $\mathcal{U}_0$  die Menge  $M$  überdeckt).

(2)  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ist *kompakt*

$\overline{\text{Df}}$   $M = \mathbb{M}$  ist kompakt.

**Satz 6.22** (*Überdeckungssatz von Heine-Borel*) 6/5/4

Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ist  $M$  beschränkt und abgeschlossen, und ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ , dann enthält  $\mathcal{U}$  eine endliche Teilüberdeckung von  $M$

(d.h.,  $M$  ist kompakt im Sinne der obigen Definition).

**Satz 6.23** Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

6/5/7

Ist  $M$  kompakt (im Sinne der Definition in metrischen Räumen), dann ist  $M$  beschränkt und abgeschlossen (in  $\mathbb{R}$ ).

**Korollar.** (*Überdeckungssatz von Heine-Borel*)

6/5/10

Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$M$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\iff M$  ist kompakt.