

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Beispiel. (Definition der *Eulerschen Zahl* e)

3/1/35

Sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Behauptung: (a_n) ist streng monoton wachsend und beschränkt. (Dann ist (a_n) nach Satz 3.8 konvergent.)

z.z.: 1. $a_n < a_{n+1}$ für jedes n und
2. (a_n) ist beschränkt.

Zu 1. g.z.z.: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (denn alle a_n sind positiv).

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}_{\geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \\ &\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \quad (\text{nach der Bernoullischen Ungleichung}) \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1, \quad \text{denn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1 &\iff (n+2)(n^2 + n + 1) > (n+1)(n^2 + 2n + 1) \\ &\iff n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

(und die letzte Ungleichung gilt offensichtlich).

Also $a_n < a_{n+1}$ für jedes n , und damit ist (a_n) streng monoton wachsend.

Zu 2. (a_n) ist beschränkt.

Offenbar ist $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq a_n$ für jedes n .

Weiterhin ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} := b_n.$$

Es genügt zu zeigen, daß die Folge (b_n) streng monoton fällt.

g.z.z.: $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ (denn alle b_n sind positiv).

Der Beweis hierzu verläuft ähnlich wie für (a_n) , er wird als Übungsaufgabe gestellt.

Damit haben wir

$$b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 \geq b_n \text{ für jedes } n.$$

Also

$$2 \leq a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \leq 4.$$

Dann ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, also konvergent und (b_n) monoton fallend und beschränkt, und somit auch konvergent.

Folglich existieren Zahlen e und e' , so daß

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e'.$$

Behauptung: $e = e'$.

Annahme: $e \neq e'$.

Dann ist $\varepsilon := |e - e'| > 0$, und folglich gilt für hinreichend große n

$$\begin{aligned} |e - e'| &= |e - a_n + a_n - b_n + b_n - e'| \leq \underbrace{|e - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |a_n - b_n| + \underbrace{|b_n - e'|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |a_n - b_n|. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\leq 4} \cdot \frac{1}{n} \leq 4 \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls } \frac{12}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Folglich ist $\varepsilon = |e - e'| < \varepsilon$ **!**

Also $e = e'$.

Satz 3.9 (Cauchysches Konvergenzkriterium)

3/1/37

Eine Folge (a_n) ist konvergent (in \mathbb{R}) gdw

für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Korollar. *Cauchyfolgen konvergieren in \mathbb{R} .*

3/1/40

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. Der n -dimensionale Vektorraum \mathbb{R}^n zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt *n -dimensionaler euklidischer Raum*. 6/1/3

Satz 6.6 *In metrischen Räumen gilt:*

6/1/29

- (1) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*
- (2) *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*
- (3) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*
- (4) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Aus dem Korollar zu Satz 3.9 folgt, daß jede Cauchyfolge in \mathbb{R} konvergiert, d.h., sie besitzt dort einen Grenzwert. Das analoge Resultat gilt für Cauchyfolgen in \mathbb{R}^n . In \mathbb{Q} konvergieren Cauchyfolgen i.a. nicht, z.B. ist $(1 + \frac{1}{n})^n$ eine Cauchyfolge in \mathbb{Q} , die in \mathbb{Q} aber keinen Grenzwert besitzt.

6/5/11

Es gibt also metrische Räume, in denen Cauchyfolgen immer konvergieren und solche, in denen das nicht der Fall ist. Dies gibt Anlaß zu der folgenden Definition.