

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*Häufungspunkt*)

6/1/20

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$ und $a \in \mathbb{M}$.

a ist ein *Häufungspunkt* von M

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ In jeder Umgebung von a liegt noch wenigstens ein von a verschiedener Punkt aus M .

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Definition. (*Überdeckung*)

6/5/1

Es sei (\mathbb{M}, ρ) ein metrischer Raum und $M \subseteq \mathbb{M}$.

Weiterhin sei \mathcal{U} ein System von (offenen) Teilmengen von \mathbb{M} (also $\mathcal{U} \subseteq \text{Pot}(\mathbb{M})$).

(1) \mathcal{U} ist eine (*offene*) *Überdeckung* von M

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Zu jedem $a \in M$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$, so daß $a \in U$.

(Die Mengen aus \mathcal{U} überdecken die Menge M).

(2) \mathcal{U} ist eine *endliche Überdeckung* von M

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ \mathcal{U} ist eine Überdeckung von M , und \mathcal{U} enthält nur endlich viele Mengen.

Satz 6.23 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.*

6/5/7

Ist M kompakt (im Sinne der Definition in metrischen Räumen), dann ist M beschränkt und abgeschlossen (in \mathbb{R}).

Beweis. Annahme: Es gilt nicht: M ist beschränkt und abgeschlossen.

6/5/8

Dann ist M nicht beschränkt oder nicht abgeschlossen.

Fall 1. M ist nicht beschränkt.

Dann gibt es eine unbeschränkte Folge (\bar{x}_i) in M , so daß $|\bar{x}_{i+1}| \geq |\bar{x}_i| + 1$ für jedes i .

Sei $\mathcal{U} := \{U_{\frac{1}{4}}(\bar{x}) : \bar{x} \in M\}$.

Offenbar ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M . Es gibt aber kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, durch das M überdeckt wird, denn jedes solche \mathcal{U}_0 könnte z.B. höchstens endlich viele der Folgeglieder überdecken, da diese zueinander einen Abstand der Größe wenigstens 1 haben. $\mathcal{M}!$

Fall 2. M ist nicht abgeschlossen.

Dann gibt es einen Häufungspunkt \bar{a} von M mit $\bar{a} \notin M$.

Für jedes $\bar{x} \in M$ ist somit $\bar{x} \neq \bar{a}$, also $|\bar{x} - \bar{a}| := \varepsilon_{\bar{x}} > 0$.

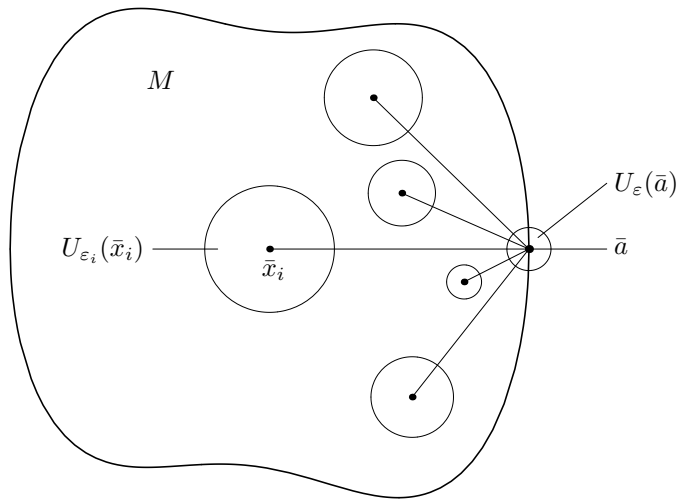
Folglich ist $\mathcal{U} := \{U_{\frac{\varepsilon_{\bar{x}}}{4}}(\bar{x}) : \bar{x} \in M\}$ eine offene Überdeckung von M .

Behauptung: Kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ überdeckt M .

Ist $\mathcal{U}_0 = \{U_{\varepsilon_1}(\bar{x}_1), \dots, U_{\varepsilon_m}(\bar{x}_m)\}$ ein beliebiges endliches Teilsystem von \mathcal{U} und $\varepsilon_i := \varepsilon_{\frac{\bar{x}_i}{4}}$, dann sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\} = \min\{\frac{|\bar{x}-\bar{a}|}{4} : i = 1, \dots, m\}$.

Folglich ist $U_\varepsilon(\bar{a}) \cap U_{\varepsilon_i}(\bar{x}_i) = \emptyset$ (vgl. Abb. 6.21).

Da \bar{a} ein Häufungspunkt von M ist, existiert ein $\bar{y} \in M$, so daß $\bar{y} \in U_\varepsilon(\bar{a})$ und $\bar{y} \notin U_{\varepsilon_i}(\bar{x}_i)$ für $i = 1, \dots, m$, daher wird \bar{y} durch \mathcal{U}_0 nicht überdeckt. Folglich gibt es kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, welches M überdeckt. **N!** \square



6/5/9

Abb. 6.21 Offensichtlich ist $U_\varepsilon(\bar{a}) \cap U_{\varepsilon_i}(\bar{x}_i) = \emptyset$ für alle $\bar{x}_i \in M$. Die ε_i -Umgebungen von \bar{x}_i haben einen Radius von $\frac{|\bar{x}_i - \bar{a}|}{4}$.

Aus den letzten beiden Sätzen ergibt sich trivialerweise das folgende Korollar, das häufig ebenfalls als Überdeckungssatz von Heine-Borel bezeichnet wird.